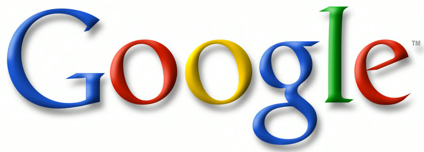
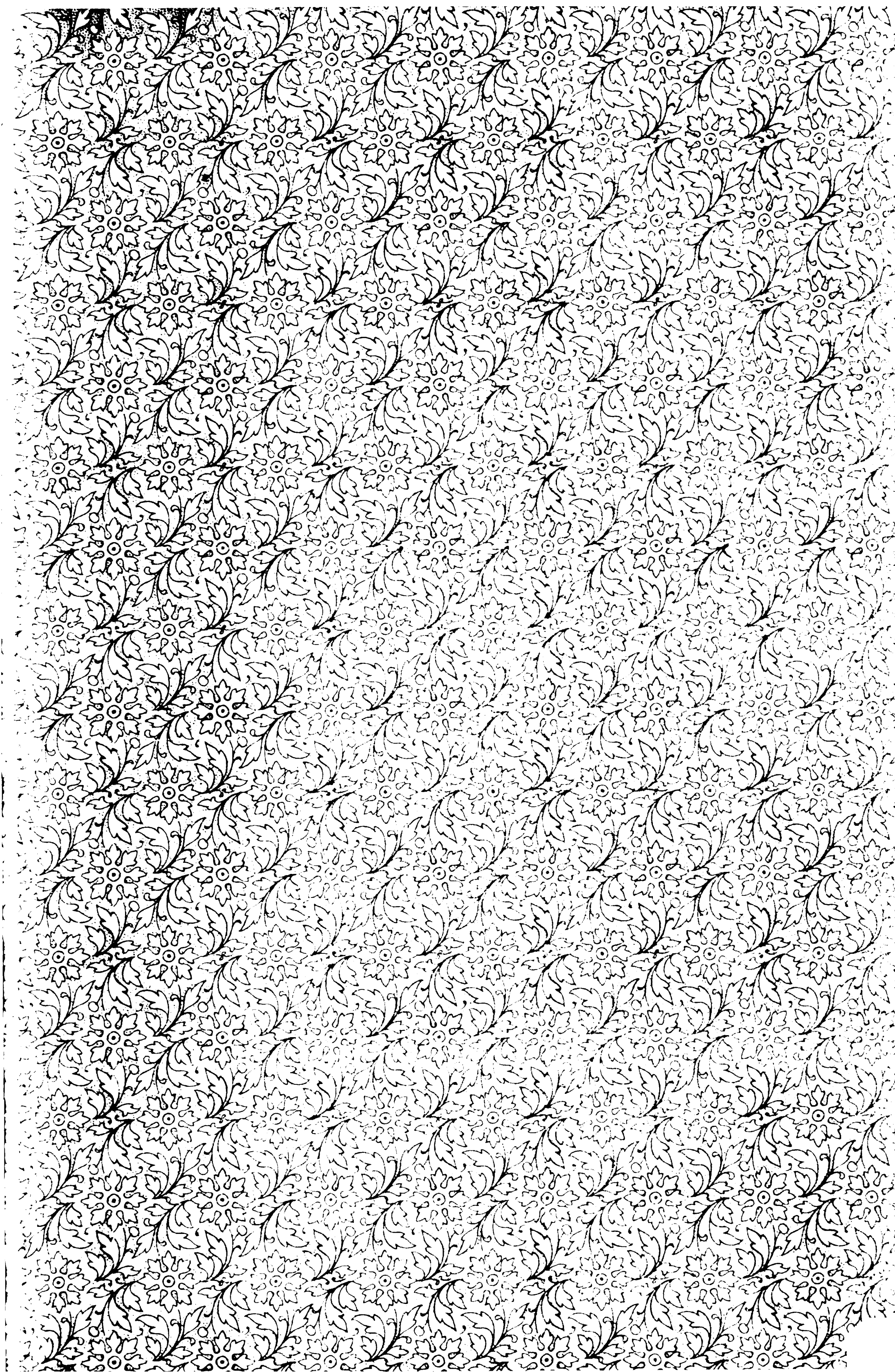




1299

Alexander Ziwet

Leitfaden

der

Mechanik.

Elementares Lehrbuch

für

technische Mittelschulen und zum Selbstunterricht

bearbeitet von

R. Lauenstein,

Ingenieur und Professor an der Großh. Baugewerkeschule in Karlsruhe.

Zweite Auflage.

Mit 169 Abbildungen.



Stuttgart 1896.

Verlag der J. G. Cotta'schen Buchhandlung

Nachfolger.

Druck der Union Deutsche Verlagsgesellschaft in Stuttgart.

stacks

Vorwort zur ersten Auflage.

Der vorliegende „Leitfaden der Mechanik" schließt sich den in demselben Verlage erschienenen früheren Arbeiten des Verfassers: „Festigkeitslehre" und „Graphische Statik" an und bildet mit ihnen zusammen ein Ganzes. Es brauchte deshalb bei der Bearbeitung des Leitfadens auf die Elasticität der festen Körper keine Rücksicht genommen zu werden und kann in Bezug auf diese auf des Verfassers „Festigkeitslehre" verwiesen werden.

Die Einteilung des Stoffes ist die allgemein übliche; Umfang und Auswahl desselben ist den Bedürfnissen des Unterrichts an technischen Mittelschulen möglichst angepaßt, dabei mehr Gewicht gelegt auf praktische Anwendungen, als auf theoretische Untersuchungen, mit denen erfahrungsgemäß denjenigen Technikern, welche ihre Ausbildung auf einer Baugewerkeschule oder einer ähnlichen Anstalt erhalten haben, im allgemeinen wenig gedient ist.

Jedem einzelnen Abschnitte ist eine Reihe von einfachen praktischen Aufgaben nebst ihren Lösungen beigefügt, um die Anwendung der entwickelten Formeln zu erläutern und die zum selbständigen Gebrauch derselben erforderliche Uebung und Sicherheit zu erlangen.

Die technischen Mittelschulen müssen bekanntlich wegen der Kürze der Studienzeit an den Fleiß der Schüler außerordentlich hohe Anforderungen stellen, und es sind daher passende Lehrbücher schon aus dem Grunde erwünscht, weil sie das sonst übliche, viel Zeit in Anspruch nehmende Diktieren, bezw. die Ausarbeitung der Vorträge überflüssig machen und mehr freie Zeit zur Einübung des Lehrstoffes gewähren.

So möge auch dieser Leitfaden zur Erleichterung des Unterrichts für den Lehrer sowohl wie für die Schüler beitragen und dieselbe freundliche Aufnahme finden, wie des Verfassers „Festigkeitslehre" und „Graphische Statik".

Karlsruhe, im Juni 1892.

R. Lauenstein.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Bei der Neubearbeitung des Leitfadens sind, abgesehen von vielfach vorgenommenen kleineren Verbesserungen und Ergänzungen, einige Paragraphen eingeschaltet worden. Diese sind: § 11 Rotationsflächen und Rotationskörper, § 20 Die oscillierende Bewegung, und § 31 Stoß des Wassers. Desgleichen ist der die Schwerpunktsbestimmungen behandelnde § 10 beträchtlich erweitert durch die Aufnahme der verschiedenen von Professor R. Land angegebenen neueren Verfahren zur Bestimmung des Schwerpunktes von Trapezen und unregelmäßigen Vierecken.

Dem Anhang wurden zwei neue Tabellen hinzugefügt; daneben haben einige der bereits vorhandenen Tabellen eine von verschiedenen Seiten gewünschte und auch wohl zweckentsprechende Vervollständigung erfahren.

Möge der Leitfaden, der bisher so freundliche Aufnahme fand, sich auch in dieser neuen Gestalt als recht brauchbar erweisen.

Karlsruhe, im April 1896.

R. Lauenstein.

Inhalt.

Anhang.

Abschnitt I.

Grundbegriffe der Mechanik.

§ 1.

Einleitung.

Die Mechanik handelt von den Kräften und den Bewegungen (oder Bewegungsänderungen), welche durch dieselben bewirkt werden.

Die Kräfte selbst sind uns unbekannt, wir können nur deren Wirkungen auf die Körper wahrnehmen. Kraft läßt sich definieren als Ursache der Bewegung (oder Bewegungsänderung), obgleich das eigentliche Wesen der Kraft damit noch nicht erklärt ist. Den Ursprung der Kraft bildet immer ein Körper, die Wirkung der Kraft sehen wir an einem anderen Körper, welcher durch dieselbe bewegt oder in seiner Bewegung geändert wird. In Bezug auf den ersten Körper ist daher die Kraft als Wirkung, in Bezug auf den zweiten als Ursache der Bewegung aufzufassen.

Gerät ein ruhender Körper unter Einwirkung einer Kraft nicht in Bewegung, so läßt sich dies dadurch erklären, daß Gegenkräfte vorhanden sind, oder daß die Kraft nicht groß genug ist, die Widerstände, welche sich der Bewegung des Körpers entgegensetzen, zu überwinden.

Die zu betrachtenden Körper können sich daher im Zustande der Ruhe (im Gleichgewichte) oder der Bewegung befinden. Die Körper selbst können ferner fest, tropfbar flüssig oder gasförmig sein, wonach sich für die gesamte Mechanik folgende Einteilung ergibt:

1. Die Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung fester Körper.
2. „ „ „ „ „ „ „ „ flüssiger „
3. „ „ „ „ „ „ „ „ gasförmiger „

Allgemein wird die Lehre vom Gleichgewicht mit Statik, die Lehre von der Bewegung mit Dynamik bezeichnet.

§ 2.

Allgemeine Eigenschaften der Körper.

Wir nehmen mit unseren Sinnen Materie oder Stoff wahr. Die Menge der im Weltenraume vorhandenen Materie ist unveränderlich.

Begrenzte Materie nennen wir einen Körper; den Raum, den derselbe einnimmt, sein Volumen, die Menge der in ihm enthaltenen Materie seine Masse.

Die Körper besitzen folgende allgemeine Eigenschaften:

1. Räumliche Ausdehnung nach Länge, Breite und Höhe.

   Als Längenmaß dient das Meter (der zehnmillionste Teil eines Erdquadranten) oder dessen Unterabteilungen (Centimeter, Millimeter).

2. Undurchdringlichkeit oder das Behaupten des eigenen Raumes; d. h. der von einem Körper erfüllte Raum kann nicht gleichzeitig von einem anderen Körper erfüllt sein.

3. Schwere. Die Körper haben vermöge der Anziehungskraft der Erde (der Schwerkraft) das Bestreben, sich deren Mittelpunkt zu nähern, sie üben infolgedessen auf eine Unterlage einen Druck aus, welcher das Gewicht des Körpers genannt wird.

   Als Gewichtseinheit dient das Kilogramm, d. i. das Gewicht eines Kubikdecimeters reinen destillierten Wassers von 4° C.

   Die Richtung, in welcher sich ein frei fallender Körper bewegt, heißt lotrecht oder vertikal, eine darauf senkrechte Linie oder Ebene wagerecht oder horizontal.

4. Teilbarkeit. Jeder Körper ist teilbar. Die mechanisch kleinsten Teilchen, aus denen ein Körper besteht, heißen Moleküle (Massenteilchen); diese können chemisch aber noch aus mehreren Atomen zusammengesetzt sein.

5. Porosität. Das Volumen eines Körpers wird von dem Materiale nicht stetig erfüllt, es sind stets Zwischenräume oder Poren vorhanden, die bei einigen Körpern (z. B. beim Schwamm) schon mit bloßem Auge, bei anderen dagegen nur mit Hilfe des Mikroskopes wahrnehmbar sind.

   Eine unmittelbare Folge der Porosität ist die Zusammendrückbarkeit und Ausdehnbarkeit der Körper. Diese Eigenschaften zeigen sich am deutlichsten bei den Gasen, am unvollkommensten bei den tropfbar-flüssigen Körpern.

6. Kohäsion nennt man die gegenseitige Anziehung der sich berührenden einzelnen Teilchen eines und desselben Körpers. Die Kohäsion äußert sich bei den festen Körpern in dem Widerstande, welchen diese der Trennung oder Verschiebung ihrer Teile entgegensetzen (Festigkeit); bei den flüssigen Körpern in dem Bestreben, Kugelgestalt anzunehmen (Regentropfen).

7. Adhäsion ist die gegenseitige Anziehung der sich berührenden einzelnen Teilchen zweier verschiedener Körper. Die Adhäsion läßt sich z. B. beobachten, wenn man zwei sorgfältig abgeschliffene Metallplatten aneinander drückt und sie darauf zu trennen sucht oder wenn man eine ins Wasser getauchte ebene Platte vertikal abhebt.

Auf der Adhäsion beruhen die Erscheinungen der Kapillarität oder Haarröhrchenanziehung. Es ist dies die Eigentümlichkeit enger Röhren und Kanäle, in eine Flüssigkeit eingetaucht, diese an ihren Wänden emporzuziehen und sie bis über das Niveau der äußeren Flüssigkeit aufsteigen zu lassen.

Diese Erscheinung zeigt sich aber nur bei solchen Flüssigkeiten, bei denen die Kohäsion der einzelnen Teilchen geringer ist als die Adhäsion zwischen der Flüssigkeit und dem eingetauchten Röhrchen (benetzende Flüssigkeit im Gegensatz zu nicht benetzenden Flüssigkeiten); z. B. steht Wasser in einem Glasröhrchen über, Quecksilber dagegen unter dem äußeren Niveau.

8. Elasticität nennt man die Fähigkeit eines Körpers, seine ursprüngliche, aber durch äußere Kräfte veränderte Form nach Aufhören der Kraftwirkung wieder anzunehmen.

Bis zu einem gewissen Grade sind alle Körper elastisch, einen vollkommen elastischen Körper gibt es jedoch nicht.

§ 3.

Von den geometrischen Bewegungen der Körper.

Bei der Bewegung der Körper finden Ortsänderungen und zugleich Zeitänderungen statt; es sind daher die Beziehungen, welche zwischen den zurückgelegten Wegen und den dabei verflossenen Zeiten bestehen, zu entwickeln. Dabei sollen zunächst die Ursachen der Bewegung, also die Kräfte, unberücksichtigt bleiben.

Die Bewegung eines Körpers bestimmt sich aus der im allgemeinen verschiedenen Bewegung seiner einzelnen Punkte. Da es bei fortschreitenden Bewegungen in vielen Fällen aber nur auf die Bewegung des Körpers im großen und ganzen ankommt, so kann der Einfachheit wegen in allen solchen Fällen der sich bewegende Körper als materieller Punkt behandelt werden, d. h. als geometrischer Punkt, in welchem die Masse des Körpers konzentriert gedacht wird.

1. Einfache Bewegungen.

Man unterscheidet geradlinige und krummlinige, ferner gleichförmige und ungleichförmige Bewegungen.

Eine gleichförmige Bewegung (sie möge geradlinig oder krummlinig sein) ist eine solche, bei welcher in gleichen Zeiten gleiche Wege zurückgelegt

werden, so daß sich die zurückgelegten Wege zu einander verhalten, wie die dabei verflossenen Zeiten. Der in der Zeiteinheit (1 sec) zurückgelegte Weg heißt die **Geschwindigkeit.**

Bezeichnet man die Geschwindigkeit mit c, die Zeit, in welcher der Weg s zurückgelegt wird, mit t, so ist:

der Weg, welcher in 1 sec zurückgelegt wird $= c$
" " " " 2 " " " $= 2c$
. . . .
allgemein " " " " t " " " $= tc$

also:

$$s = ct \qquad 1)$$

oder in Worten:

Weg = Geschwindigkeit × Zeit.

Da der Weg s hier als Produkt zweier Faktoren c und t erscheint, so kann derselbe graphisch dargestellt werden als Rechteck, dessen Grundlinie = t und dessen Höhe = c ist (Fig. 1).

Führt der Körper eine geradlinig fortschreitende Bewegung aus, so sind die Bewegungen seiner sämtlichen Punkte ebenfalls geradlinig fortschreitend. Dreht sich aber der Körper um eine feste Achse, mit welcher er unveränderlich verbunden ist, so beschreibt jeder außerhalb dieser Achse liegende Punkt des Körpers einen Kreis, dessen Mittelpunkt die Achse bildet und dessen Ebene auf dieser senkrecht steht. Ist die Drehung des Körpers und folglich jedes Punktes desselben in seinem Kreise gleichförmig, so ist nach Gl. 1) die Geschwindigkeit eines in der Entfernung r von der Drehachse befindlichen Punktes:

Fig. 1.

$$c = \frac{s}{t} = \frac{2r\pi}{t} \qquad 2)$$

oder wenn die Anzahl der Umdrehungen pro min mit n bezeichnet wird:

$$c = \frac{2r\pi n}{60} \qquad 3)$$

Bei der **veränderlichen Bewegung** werden in gleichen Zeiten ungleiche Wege zurückgelegt, die Geschwindigkeit ändert sich daher in jedem Augenblick. Trotzdem kann auch bei einer solchen Bewegung von der Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitpunkte die Rede sein. Man versteht darunter den Weg, welchen der sich bewegende Körper in der nächstfolgenden Sekunde zurücklegen würde, wenn er sich von jenem Zeitpunkte an gleichmäßig fortbewegte.

Die Geschwindigkeitsänderung kann bei der veränderlichen Bewegung wieder gleichförmig oder ungleichförmig sein, wonach man **gleichförmig veränderte** und **ungleichförmig veränderte** Bewegungen unterscheidet. Auf die letzteren gehen wir nicht näher ein.

Eine **gleichförmig veränderte** Bewegung ist eine solche, bei welcher sich die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleiche Größen ändert. Die in der Zeiteinheit (1 sec) erfolgende

Geschwindigkeitszunahme heißt **Beschleunigung**,
„ -abnahme „ **Verzögerung**.

Die Verzögerung kann als negative Beschleunigung angesehen werden.

Bezeichnet man die Beschleunigung mit p, die Anfangsgeschwindigkeit mit c, die nach t Sekunden erlangte Endgeschwindigkeit mit v, so ist:

die Geschwindigkeit nach 1 sec $= c + p$
„ „ „ 2 „ $= c + 2p$
. . . .
allgemein „ „ „ t „ $= c + pt$

also:

$$v = c + pt$$

woraus sich für die Beschleunigung p der Ausdruck ergibt:

$$\mathbf{p = \frac{v - c}{t}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Die gleichförmig beschleunigte Bewegung läßt sich in ähnlicher Weise, wie in Fig. 1 bei der gleichförmigen Bewegung geschehen ist, graphisch darstellen durch Fig. 2, in welcher $AB = t$, $AD = c$, $BC = v$ ist.

Fig. 2.

Der während der Zeit t zurückgelegte Weg s ist gleich dem Inhalt ABCD, folglich:

$$\mathbf{s = \left(\frac{v + c}{2}\right) t} \quad \ldots \quad 5)$$

Man gelangt zu diesem Ausdruck auch durch die Ueberlegung, daß der bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung während der Zeit t zurückgelegte Weg s gleich dem Wege sein muß, den der Körper zurücklegen würde, wenn er sich gleichförmig mit der mittleren Geschwindigkeit $\left(\frac{v + c}{2}\right)$ bewegte.

Setzt man den sich aus Gl. 4) ergebenden Wert

$$t = \frac{v - c}{p}$$

in Gl. 5) ein, so folgt:

$$s = \left(\frac{v + c}{2}\right)\left(\frac{v - c}{p}\right) = \mathbf{\frac{v^2 - c^2}{2p}} \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

Man kann für den Weg s noch weitere Ausdrücke herleiten, indem man die Gl. 4) einmal für v, sodann für c auflöst, und die sich ergebenden Werte in Gl. 5) einsetzt.

Nach Gl. 4) ist:

$$v = c + pt.$$

Durch Einsetzung dieses Wertes in Gl. 5) wird dann:

$$s = \left(\frac{c + pt + c}{2}\right) t = ct + \frac{pt^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

Nach Gl. 4) ist ferner:

$$c = v - pt.$$

Durch Einsetzung dieses Wertes in Gl. 5) entsteht:

$$s = \left(\frac{v + v - pt}{2}\right) t = vt - \frac{pt^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

Die beiden letzten Ausdrücke für s (Gl. 7 und 8) ergeben sich geometrisch auch aus Fig. 2, indem man das den Weg s darstellende Trapez ABCD einmal auffaßt als Summe des Rechteckes ABED und des Dreieckes CDE, ein anderes Mal als Differenz des Rechteckes ABCF und des Dreieckes CDF. Es ist nämlich:

$$CE = DF = v - c = pt$$

folglich:

$$\Delta CDE = \Delta CDF = pt\,\frac{t}{2} = \frac{pt^2}{2}$$

Die Formeln für die gleichförmig beschleunigte Bewegung liefern folgende Zusammenstellungen:

$$p = \frac{v - c}{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

$$s = \frac{v + c}{2}\, t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

$$s = ct + \frac{pt^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

$$s = vt - \frac{pt^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

Setzt man in den Formeln 4) bis 7) die Anfangsgeschwindigkeit c = Null, so erhält man:

$$p = \frac{v}{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

$$s = \frac{v}{2}\, t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

$$s = \frac{v^2}{2p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

$$s = \frac{pt^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12)$$

Aufgabe 1. Welchen Weg legt eine Lokomotive in 24 min zurück, wenn sie sich mit einer Geschwindigkeit von 12 m in der sec gleichmäßig fortbewegt?

Auflösung. Nach Gl. 1) ist:

$$s = ct$$

Da nun

$$c = 12 \text{ m}$$

und

$$t = 24 \text{ min} = 24 \,.\, 60 = 1440 \text{ sec}$$

gegeben ist, so folgt:

$$s = 12 \,.\, 1440 = 17\,280 \text{ m}$$

Aufgabe 2. Welche Geschwindigkeit hat eine Lokomotive, welche pro Stunde 60 km zurücklegt?

Auflösung. Gegeben ist:

$$t = 60 \,.\, 60 = 3600 \text{ sec}$$

und

$$s = 60 \text{ km} = 60\,000 \text{ m}$$

folglich ist nach Gl. 1)

$$c = \frac{s}{t} = \frac{60\,000}{3600} = 16^2/_3 \text{ m}$$

Aufgabe 3. Wenn die Geschwindigkeit des Lichtes zu 40 000 Meilen, die Entfernung der Erde von der Sonne zu 21 Millionen Meilen angenommen wird, wie lange braucht dann ein Lichtstrahl, um von der Sonne zur Erde zu gelangen?

Auflösung. Nach Gl. 1) ist:

$$t = \frac{s}{c} = \frac{21\,000\,000}{40\,000} = 525 \text{ sec} = 8 \text{ min } 45 \text{ sec}$$

Aufgabe 4. Der Mond braucht zu seiner Bahn um die Erde rund 28 Tage. Wie groß ist die Geschwindigkeit desselben, wenn die Entfernung des Mondes von der Erde zu 50 000 Meilen angenommen wird?

Auflösung.

$$1 \text{ Tag} = 24 \,.\, 60 \,.\, 60 = 86\,400 \text{ sec}$$

$$28 \text{ Tage} = 28 \,.\, 86\,400 = 2\,419\,200 \text{ sec}$$

Der Umfang der Mondbahn ist:

$$2 r \pi = 2 \,.\, 50\,000 \,.\, 3{,}14 = 314\,000 \text{ Meilen}$$

folglich nach Gl. 2)

$$c = \frac{314\,000}{2\,419\,200} = \backsim 0{,}13 \text{ Meilen.}$$

Aufgabe 5. Eine Dampfmaschine macht $n = 50$ Umdrehungen pro min; der Kurbelhalbmesser ist $r = 0{,}4$ m. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit des Kurbelzapfens?

Auflösung. Nach Gl. 3) ist:

$$c = \frac{2 \,.\, 0{,}4 \,.\, 3{,}14 \,.\, 50}{60} = \backsim 2{,}1 \text{ m}$$

Aufgabe 6. Ein sich mit der Beschleunigung von 1 m bewegender Körper habe die Anfangsgeschwindigkeit $c = 2$ m, die Endgeschwindigkeit $v = 10$ m; welche Zeit hat er zu der Bewegung gebraucht und wie groß ist der durchlaufene Weg?

Auflösung. Nach Gl. 4) ist:

$$t = \frac{v - c}{p} = \frac{10 - 2}{1} = 8 \text{ sec}$$

ferner nach Gl. 5)

$$s = \frac{v + c}{2} t = \frac{10 + 2}{2} 8 = 48 \text{ sec}$$

Aufgabe 7. Ein Eisenbahnzug habe in einem bestimmten Augenblicke eine Geschwindigkeit von 15 m. Er werde dann so gebremst, daß seine Geschwindigkeit in jeder sec um 0,5 m abnimmt. Wie groß ist die Geschwindigkeit nach 24 sec und wie groß ist der während dieser Zeit zurückgelegte Weg?

Auflösung. Gegeben ist:

$$t = 24$$
$$c = 15$$
$$p = -0{,}5$$

folglich wird nach Gl. 4)

$$v = c + p\,t = 15 - 0{,}5 \,.\, 24 = 3 \text{ m}$$

und nach Gl. 5)

$$s = \frac{v + c}{2}\,t = \frac{3 + 15}{2}\,24 = 216 \text{ m}$$

Aufgabe 8. Ein Körper bewege sich mit der Geschwindigkeit $c = 6$ m von einem Punkte A geradlinig und mit der Beschleunigung $p = 0{,}2$ nach dem Punkte B, wo er mit der Geschwindigkeit $v = 20$ m ankommt. Wie groß ist die Entfernung der Punkte A und B voneinander?

Auflösung. Nach Gl. 6) ist:

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2p} = \frac{20^2 - 6^2}{2 \,.\, 0{,}2} = 910 \text{ m}$$

Aufgabe 9. Eine Lokomotive hat in einem bestimmten Augenblicke eine Geschwindigkeit von 5 m und setzt dann ihre Bewegung mit 0,6 m Beschleunigung 16 sec lang fort. Welchen Weg hat sie während dieser Zeit zurückgelegt?

Auflösung. Nach Gl. 7) ist:

$$s = c\,t + \frac{p\,t^2}{2} = 5 \,.\, 16 + \frac{0{,}6 \,.\, 16^2}{2} = 156{,}8 \text{ m}$$

Aufgabe 10. Welche Beschleunigung erhält eine Kanonenkugel in dem Laufe eines 5 m langen Geschützrohres, wenn sie mit einer Geschwindigkeit von 400 m bei der Mündung ankommt?

Auflösung. Da hier die Anfangsgeschwindigkeit = Null ist, so erhält man aus Gl. 11)

$$p = \frac{v^2}{2s} = \frac{400^2}{2 \,.\, 5} = 16\,000 \text{ m}$$

Aufgabe 11. Wenn die in voriger Aufgabe besprochene Kanonenkugel in einem luftleeren Raume vertikal in die Höhe geschossen wird und dabei eine Verzögerung von 9,81 m erleidet, wie hoch wird dieselbe steigen?

Auflösung. (Gl. 11.)

$$s = \frac{400^2}{2 \,.\, 9{,}81} = 8155 \text{ m}$$

Aufgabe 12. Ein Stein braucht 3,5 Sekunden, um einen 60 m tiefen Schacht zu durchfallen. Wie groß ist die Beschleunigung?

Auflösung. Nach Gl. 12) ist:

$$p = \frac{2\,s}{t^2} = \frac{2 \,.\, 60}{3{,}5^2} = \backsim 9{,}8 \text{ m}$$

2. Zusammengesetzte Bewegungen.

Bewegt sich ein materieller Punkt in einer bestimmten Richtung, während der Körper, auf dem sich derselbe befindet oder dem er angehört, gleichzeitig sich in einer anderen Richtung bewegt, so führt der materielle Punkt in Wirklichkeit eine Bewegung aus, die sich aus jenen beiden Einzelbewegungen zusammensetzt.

Es sei der Punkt A (Fig. 3) der Ausgangspunkt der Bewegung, AY die Bahnlinie des materiellen Punktes, AX die Bahnlinie des Körpers. In einer bestimmten Zeit t habe sich der Körper von A nach C bewegt; es ist dann inzwischen die Bahnlinie AY aus der ursprünglichen Lage in die neue der AY parallele Lage CY_1 gekommen. Gleichzeitig aber habe der materielle Punkt die Strecke AB zurückgelegt, welche daher auf der neuen Lage CY_1 abzutragen ist (CD = AB). Der Endpunkt D ist dann der Ort, welchen der materielle Punkt nach t Sekunden wirklich erreicht hat. D ist der dem Anfangspunkte A der Bewegung gegenüber liegende Eckpunkt eines Parallelogramms, welches aus den beiden Strecken AB und AC konstruiert ist.

Fig. 3.

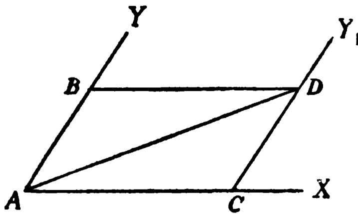
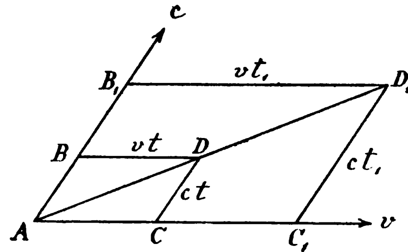


Fig. 4.



Als Beispiel kann die Bewegung eines Menschen auf einem segelnden Schiffe angeführt werden.

Sind die beiden Einzelbewegungen (Seitenbewegungen) AB und AC geradlinig und gleichförmig, so ist die wirklich ausgeführte Bewegung AD (die resultierende Bewegung) ebenfalls geradlinig und gleichförmig.

Zum Beweise bestimme man die Punkte D und D_1, welche der materielle Punkt nach t bezw. t_1 Sekunden erreicht hat (Fig. 4). Sind c und v die Geschwindigkeiten der beiden gleichförmigen Seitenbewegungen, so ist D der dem Punkte A gegenüber liegende Eckpunkt eines aus den Längen $AB = ct$ und $AC = vt$ konstruierten Parallelogramms. Ebenso ist D_1 der dem Punkte A gegenüber liegende Eckpunkt eines aus den Längen $AB_1 = ct_1$ und $AC_1 = vt_1$ konstruierten Parallelogramms.

Aus Fig. 4 folgt dann die Proportion:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AC_1}{C_1D_1} = \frac{v}{c}$$

d. h. die Punkte ADD_1 liegen in einer geraden Linie. Aus Fig. 4 folgt ferner:

$$\frac{AD}{AD_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{ct}{ct_1} = \frac{t}{t_1}$$

oder in Worten: Bei der resultierenden Bewegung verhalten sich die zurückgelegten Wege, wie die dabei verflossenen Zeiten. Die resultierende Bewegung ist daher geradlinig und gleichförmig; die Geschwindigkeit w derselben wird dargestellt durch die Diagonale eines aus den Seitengeschwindigkeiten c und v konstruierten Parallelogramms.

Fallen die Bewegungsrichtungen in dieselbe Gerade, so ist die resultierende Geschwindigkeit gleich der Summe der Seitengeschwindigkeiten, wenn die Bewegungen gleiche Richtung, dagegen gleich der Differenz der Seitengeschwindigkeiten, wenn die Bewegungen entgegengesetzte Richtung haben. Stehen die Seitengeschwindigkeiten c und v senkrecht aufeinander, so hat die resultierende Geschwindigkeit w die Größe:

$$w = \sqrt{c^2 + v^2}$$

Bilden die Seitengeschwindigkeiten den beliebigen Winkel φ miteinander, so wird:

$$w = \sqrt{c^2 + v^2 + 2cv\cos\varphi}$$

Umgekehrt kann man nun auch jede gegebene Geschwindigkeit als resultierende Geschwindigkeit ansehen und dieselbe in zwei Seitengeschwindigkeiten von gegebener Richtung zerlegen, indem man ein Parallelogramm konstruiert, dessen Diagonale gleich der gegebenen Geschwindigkeit ist und dessen Seiten parallel den Richtungen der gesuchten Seitengeschwindigkeiten gezogen sind.

Genau in derselben Weise wie die gleichförmigen Bewegungen lassen sich die gleichförmig beschleunigten (oder verzögerten) Bewegungen durch Parallelogrammkonstruktion zusammensetzen und zerlegen.

Die aus zwei gleichförmig beschleunigten Bewegungen zusammengesetzte resultierende Bewegung ist wieder gleichförmig beschleunigt; die resultierende Beschleunigung wird dargestellt durch die Diagonale des aus den beiden Seitenbeschleunigungen konstruierten Parallelogramms.

Durch Zusammensetzung einer gleichförmigen mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung entsteht, wenn beide einen Winkel miteinander bilden, eine krummlinige (parabolische) Bewegung (vergl. § 17).

Aufgabe 13. Ein Schiff bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 3 m stromabwärts. Wie groß ist die resultierende Geschwindigkeit w eines Menschen, welcher mit einer Geschwindigkeit von 1,2 m auf dem Verdecke des Schiffes in der Richtung stromabwärts geht? Wie groß die Geschwindigkeit w_1, wenn er in umgekehrter Richtung (stromaufwärts) geht?

Auflösung.

$$w = 3 + 1{,}2 = 4{,}2 \text{ m}$$
$$w_1 = 3 - 1{,}2 = 1{,}8 \text{ m}$$

Aufgabe 14. Die Geschwindigkeit eines Bootes senkrecht zur Stromrichtung sei v = 3 m; der Strom selbst fließt mit einer Geschwindigkeit c = 4 m. Wie groß ist die resultierende Geschwindigkeit w des Bootes?

Auflösung.

$$w = \sqrt{c^2 + v^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ m}$$

Aufgabe 15. Ein Körper hat nach einer Richtung eine Geschwindigkeit von 6 m und zugleich nach einer anderen Richtung, die mit ersterer einen Winkel von 60° einschließt, eine Geschwindigkeit von 3 m. Es soll die resultierende Geschwindigkeit w durch Zeichnung und Rechnung bestimmt werden.

Auflösung. Man findet durch Rechnung:

$$w = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2 \cdot 6 \cdot 3 \cos 60^0} = 7{,}9373 \text{ m}$$

§ 4.

Physikalische Grundgesetze.

1. Das Gesetz der Trägheit (Galiläi 1638).

Jeder Körper bleibt im Zustande der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, solange er nicht durch äußere Kräfte zu einer Aenderung des Zustandes gezwungen wird.

Eine Kraft von sehr kurzer Wirkungsdauer (eine sogen. Momentankraft) erteilt bei genügender Stärke einem vorher ruhenden Körper eine gleichförmig geradlinige Bewegung, die dem Trägheitsgesetz zufolge unverändert fortdauern würde, wenn sie nicht durch Gegenkräfte (Widerstände) schließlich aufgehoben würde.

Erhält z. B. ein Schlitten auf einer Eisfläche einen Stoß, so würde derselbe sich gleichförmig und geradlinig endlos fortbewegen, wenn ihn nicht schließlich die Reibung und der Luftwiderstand zum Stillstand brächte. Um den Schlitten in seiner Bewegung plötzlich aufzuhalten oder auch von seiner geradlinigen Bahn abzulenken, dazu bedarf es immer einer äußeren Kraft.

Durch eine konstante Kraft erhält ein Körper eine geradlinige gleichförmig beschleunigte Bewegung und zwar ist die Beschleunigung der Bewegung um so größer, je größer die Kraft ist. Wirken nacheinander zwei Kräfte auf einen Körper von derselben Masse und erteilen diesem die nämliche Beschleunigung, so nimmt man die Kräfte als einander gleich an. Man betrachtet eine Kraft als n mal so groß wie eine andere, wenn sie einer und derselben Masse eine n mal so große Beschleunigung erteilt, als die andere Kraft.

Die Kräfte verhalten sich also wie die Beschleunigungen, welche sie einer und derselben Masse erteilen.

Man nennt zwei Massen einander gleich, wenn sie durch dieselbe Kraft gleiche Beschleunigungen erhalten. Die Masse eines Körpers bezeichnet man als um so größer, je kleiner die Beschleunigung ist, welche ihr von einer bestimmten Kraft erteilt wird. Eine Masse heißt n mal so groß als eine andere,

wenn sie durch dieselbe Kraft eine n mal kleinere Beschleunigung erhält, oder wenn sie durch eine n mal größere Kraft dieselbe Beschleunigung erhält als die andere Masse.

Die Massen verhalten sich also umgekehrt wie die Beschleunigungen, welche gleiche Kräfte ihnen erteilen, oder:

Die Massen verhalten sich wie die Kräfte, durch welche sie gleiche Beschleunigungen erhalten.

Um die Größen der Kräfte durch Zahlen ausdrücken zu können, hat man dieselben auf eine bestimmte Krafteinheit zu beziehen. Am gebräuchlichsten ist es, das Gewicht eines Körpers, welcher 1 kg wiegt, als Krafteinheit anzunehmen. Als Masseneinheit gilt die Masse eines Körpers, welcher durch die Krafteinheit ein Meter Beschleunigung erhält. Eine m mal so große Masse würde durch die Krafteinheit eine m mal so kleine Beschleunigung erhalten, also die Beschleunigung $\frac{1}{m}$. Da sich nun die Kräfte verhalten, wie die Beschleunigungen, welche sie einer und derselben Masse erteilen, so wird eine Kraft P der Masse m eine P mal so große Beschleunigung erteilen als die Krafteinheit, folglich die Beschleunigung $\frac{P}{m}$. Danach erhält man folgendes Schema:

Die Kraft 1 erteilt der Masse 1 die Beschleunigung 1.
" " 1 " " " m " " $\frac{1}{m}$
" " P " " " m " " $\frac{P}{m}$

Bezeichnet man die Beschleunigung mit p, so ist:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

oder in Worten:

$$\textbf{Beschleunigung} = \frac{\textbf{Kraft}}{\textbf{Masse}}$$

Wird die Kraft = Null, so wird auch die Beschleunigung = Null, d. h. der Bewegungszustand des Körpers ändert sich ohne Einwirkung einer Kraft nicht.

2. Das Gesetz der Schwere (Newton 1680).

Die Gewichte der Körper sind Kräfte, welche allen Körpern die gleiche Beschleunigung erteilen, nämlich:

$$\mathbf{g} = \mathbf{9{,}81\ m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

Diese Größe heißt die Beschleunigung des freien Falles.

Bezeichnet man das Gewicht der Masse m mit G, so folgt aus Gl. 13), indem darin G für P und g für p eingesetzt wird:

$$g = \frac{G}{m}$$

oder:

$$m = \frac{G}{g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15)$$

$$\textbf{Masse} = \frac{\textbf{Gewicht}}{\textbf{Fallbeschleunigung}}$$

Gl. 15) läßt erkennen, daß man die Gewichtszahl G noch durch $g = 9{,}81$ zu dividieren hat, um die Massenzahl zu erhalten. Wenn also (wie oben geschehen ist) 1 kg als Gewichtseinheit (Krafteinheit) angenommen wird, so ergibt sich als Masseneinheit 9,81 kg.

Die Masseneinheit ist danach die Masse eines Körpers, welcher 9,81 kg wiegt.

Für eine Masse m_1, deren Gewicht G_1 ist, erhält man nach Gl. 15) den Ausdruck:

$$m_1 = \frac{G_1}{g}$$

welcher durch Gl. 15) dividiert die Proportion gibt:

$$\frac{m_1}{m} = \frac{G_1}{G}$$

In Worten: Die Massen der Körper verhalten sich wie ihre Gewichte.

Um die Massen zweier Körper miteinander zu vergleichen, braucht man daher nur deren Gewichte mittels einer Wage zu bestimmen.

Aufgabe 16. Durch eine Kraft $P = 30$ kg erhält ein Körper eine Beschleunigung $p = 1{,}8$ m. Wie groß ist die Beschleunigung p_1, welche demselben Körper durch eine Kraft $P_1 = 20$ kg erteilt wird?

Auflösung. Aus:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{p_1}{p}$$

folgt:

$$p_1 = \frac{P_1}{P}\, p = \frac{20}{30}\, 1{,}8 = 1{,}2 \text{ m}$$

Aufgabe 17. Ein Körper von der Masse m erhält durch eine gewisse Kraft die Beschleunigung $p = 2$ m; dieselbe Kraft erteilt einem zweiten Körper von der Masse m_1 die Beschleunigung $p_1 = 5$ m. In welchem Verhältnis stehen die Massen m und m_1 zu einander?

Auflösung.

$$\frac{m_1}{m} = \frac{p}{p_1} = \frac{2}{5} \text{ oder } m_1 = \frac{2}{5}\, m$$

Aufgabe 18. Wie groß ist die Masse m_1 eines Körpers, wenn demselben durch eine Kraft $P_1 = 75$ kg dieselbe Beschleunigung p erteilt wird, die ein anderer Körper von der Masse $m = 15$ durch eine Kraft $P = 50$ kg erhält?

Auflösung. Aus:

$$\frac{m_1}{m} = \frac{P_1}{P}$$

folgt:

$$m_1 = \frac{P_1}{P} m = \frac{75}{50} 15 = 22,5$$

Aufgabe 19. Welche konstante Kraft P ist (bei Vernachlässigung aller Reibungen und Widerstände) erforderlich, um einer Masse $m = 20$ eine Beschleunigung $p = 3,5$ m zu erteilen?

Auflösung. Nach Gl. 13) ist:

$$P = p m = 3,5 \,.\, 20 = 70 \text{ kg}$$

Aufgabe 20. Wie groß ist die Masse m eines Körpers, welcher 35,3 kg wiegt?

Auflösung. (Gl. 14 und 15)

$$m = \frac{G}{g} = \frac{35,3}{9,81} = \backsim 3,6$$

Aufgabe 21. Die Masse m eines Körpers sei bestimmt durch die Zahl 12; was wiegt dieser Körper?

Auflösung.

$$G = m g = 12 \,.\, 9,81 = 117,72 \text{ kg}$$

3. Das Gesetz der Gegenwirkung (Reaktionsgesetz).

Die Erfahrung lehrt, daß die Kräfte in der Natur nie einzeln auftreten, sondern daß jede Kraft ihre Gegenkraft hat. Kraft und Gegenkraft wirken stets in derselben geraden Linie, haben gleiche Größe, aber entgegengesetzte Richtung.

In einzelnen Fällen läßt sich dieses Gesetz sofort klar erkennen.

Der Druck eines Körpers A auf einen Körper B ruft den gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Druck des Körpers B auf den Körper A hervor.

Wenn jemand eine Last fortzieht, so wird er seinerseits mit der gleichen Kraft nach der Last hingezogen.

Ein in seinen Endpunkten unterstützter, durch Vertikalkräfte belasteter horizontaler Balken übt auf jeden der Unterstützungspunkte einen vertikal abwärts gerichteten Druck, den sogen. Auflagerdruck, aus; umgekehrt erfährt der Balken durch die Unterstützungspunkte die gleichen, aber entgegengesetzt, also vertikal aufwärts gerichteten Drücke (Auflagerreaktionen).

Aber auch in anderen Fällen, die sich der direkten Beobachtung entziehen, findet sich das Gesetz der Gegenwirkung bestätigt; so z. B. hat die Kraft, mit welcher die Erde von der Sonne angezogen wird, genau dieselbe Größe als die (entgegengesetzt gerichtete) Kraft, mit welcher ihrerseits die Sonne von der Erde angezogen wird.

Ueberall in der Natur haben Druck und Gegendruck, Zug und Gegenzug dieselbe Größe, aber umgekehrte Richtung.

4. Das Parallelogrammgesetz.

Wenn gleichzeitig mehrere Kräfte auf einen Körper wirken, so ist die Bewegung desselben die Resultierende aller derjenigen Bewegungen, welche der Körper ausführen würde, wenn jede der Kräfte einzeln auf ihn einwirkte.

Auf diesem allgemeinen Gesetze beruht der Satz von dem Parallelogramm der Kräfte. Derselbe lautet:

Wirken zwei Kräfte auf einen Körper, so stellt die Diagonale des aus den beiden Kräften konstruierten Parallelogramms ihrer Größe und Richtung nach die Mittelkraft oder Resultierende dar.

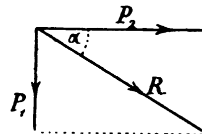
Umgekehrt kann jede Kraft als Resultierende aufgefaßt und durch Parallelogrammkonstruktion in zwei Seitenkräfte oder Komponenten von gegebener Richtung zerlegt werden.

Die Zusammensetzung gegebener Kräfte zu einer Resultierenden, bezw. die Zerlegung einer gegebenen Kraft in ihre Komponenten geschieht nach denselben Regeln wie die Zusammensetzung oder Zerlegung der Geschwindigkeiten (§ 3, Seite 9), indem dabei jede Kraft dargestellt wird durch eine gerade Linie, welche so viele Längeneinheiten enthält, als die betreffende Kraft Krafteinheiten.

Wirken die Seitenkräfte in derselben geraden Linie und nach einer und derselben Richtung, so ist die Mittelkraft gleich der Summe derselben.

Wirken zwei Seitenkräfte in derselben geraden Linie, aber nach entgegengesetzten Richtungen, so ist die Mittelkraft gleich der Differenz derselben und hat die Richtung der größeren. Sind die beiden Seitenkräfte einander gleich, so ist die Resultierende gleich Null; die Seitenkräfte halten sich dann einander im Gleichgewicht.

Fig. 5.



Sind mehr als zwei in derselben Geraden, aber nach entgegengesetzten Richtungen wirkende Kräfte vorhanden, so läßt sich dieser Fall auf den vorigen dadurch zurückführen, daß man alle nach einer Richtung hin wirkenden Kräfte zu einer, alle nach der entgegengesetzten Richtung hin wirkenden Kräfte zu einer anderen Kraft durch Summierung zusammenfaßt.

Sollen zwei Komponenten P_1 und P_2, deren Richtungen einen rechten Winkel miteinander bilden, zu einer Resultierenden R vereinigt werden (Fig. 5), so ergibt sich deren Größe durch Rechnung aus:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$$

Die Richtung von R wird bestimmt durch:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_1}{P_2}$$

Ist umgekehrt eine Kraft R in zwei Komponenten P_1 und P_2 so zu zerlegen, daß diese senkrecht zu einander gerichtet sind, und ist der Winkel, welchen P_2 und R miteinander bilden $= \alpha$ (Fig. 5), so wird:

$$P_1 = R \sin \alpha$$
$$P_2 = R \cos \alpha$$

Soll bei der Zerlegung die eine Komponente P_1 senkrecht zu R gerichtet sein, während die andere Komponente P_2 den Winkel α mit der Kraft R bildet (Fig. 6), so wird:

$$P_1 = R \operatorname{tg} \alpha$$
$$P_2 = \frac{R}{\cos \alpha}$$

Fig. 6.

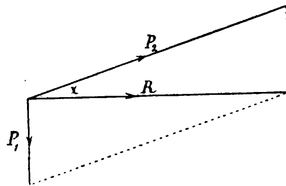
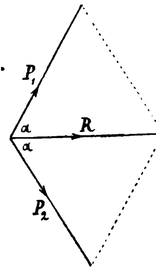


Fig. 7.



Bildet jede der Komponenten den gleichen Winkel α mit der Kraft R (ein Fall, der z. B. bei einer Kniehebelpresse vorkommt), so werden die Komponenten einander gleich. Man erhält (Fig. 7):

$$P_1 = P_2 = \frac{R}{2 \cos \alpha}$$

Sind mehrere in einer Ebene auf einen Punkt wirkende Kräfte $P_1\, P_2\, P_3 \ldots$ zu einer Resultierenden zu vereinigen, so fasse man zunächst zwei derselben, z. B. P_1 und P_2 durch Parallelogrammkonstruktion zu einer Resultierenden R_1 zusammen, bilde sodann aus R_1 und P_3 die Resultierende R_2, weiter aus R_2 und P_4 die Resultierende R_3 u. s. f.

Die Aufgabe, eine Kraft in mehr als zwei Komponenten von gegebenen Richtungen zu zerlegen, ist unbestimmt, da unendlich viele Lösungen möglich sind.

Ein interessantes Beispiel der Kräftezerlegung bietet ein lavierendes Schiff (Fig. 8). Ist XY die Windrichtung und MN das Segel, so zerlegt sich die Windkraft W zunächst in die Komponenten T in der Richtung des Segels, und V senkrecht dazu. Diese letztere Kraft V kann nur eine Wirkung auf das Segel hervorbringen. Zerlegt man dieselbe wieder in die Seitenkräfte P in der Richtung des Schiffes, und Q senkrecht dazu, so ist in P diejenige Kraft gefunden, durch welche das Schiff vorwärts bewegt wird, während die Kraft Q eine (wegen des großen Wasserwiderstandes geringe) Seitenbewegung, die sogen. Trift erzeugt.

Aufgabe 22. In derselben geraden Linie und nach derselben Richtung wirken die Kräfte $P_1 = 20$ kg, $P_2 = 35$ kg, $P_3 = 42$ kg. Wie groß ist deren Mittelkraft R?

Auflösung.

$$R = 20 + 35 + 42 = 97 \text{ kg}$$

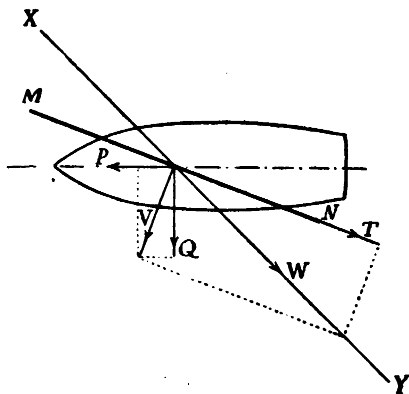
Aufgabe 23. In derselben Geraden wirken die Kräfte 48, 30, 16 kg nach einer Richtung, die Kräfte 15, 13, 8 kg nach der entgegengesetzten Richtung. Man soll deren Resultierende R bestimmen.

Auflösung.

$$R = 48 + 30 + 16 - (15 + 13 + 8) = 58 \text{ kg}$$

Die Richtung von R ist diejenige, in welcher die Kräfte 48, 30, 16 kg wirken, weil deren Summe größer ist als die Summe der Kräfte 15, 13, 8 kg.

Fig. 8.



Aufgabe 24. Zwei senkrecht zu einander gerichtete Kräfte $P_1 = 60$ kg und $P_2 = 30$ kg wirken auf einen Körper, dessen Gewicht $G = 20$ kg ist. Wie groß ist die Resultierende R, welchen Winkel α schließt dieselbe mit P_1 ein und wie groß ist die Beschleunigung p, welche der Körper durch die Einwirkung der Kraft R erfährt?

Auflösung. Trägt man die Kräfte P_1 und P_2 als gerade Linien in einem passenden Maßstabe (z. B. 1 kg = 1 mm) auf, so findet man durch Messung oder Rechnung:

$$R = 67{,}1 \text{ kg}$$
$$\alpha = 26^0\,40'$$

Die gesuchte Beschleunigung ist:

$$p = \frac{R}{m} = \frac{R\,g}{G} = \frac{67{,}1\,.\,9{,}81}{20} = 32{,}9 \text{ m}$$

Aufgabe 25. Es soll von zwei sich unter 60^0 schneidenden Kräften $P_1 = 50$ kg, $P_2 = 40$ kg die Resultierende R durch Konstruktion gefunden werden.

Auflösung.

$$R = 78{,}1 \text{ kg}$$

Dasselbe Resultat ergibt sich rechnerisch aus der Gleichung:

$$R = \sqrt{50^2 + 40^2 + 2\,.\,50\,.\,40\,.\,\cos 60^0}$$

Aufgabe 26. Die Strebe eines Hängewerkes sei unter 40° gegen die Horizontale geneigt. Es sollen Vertikalkomponente V und Horizontalkomponente H des Strebendruckes P = 5000 kg durch Rechnung bestimmt werden.

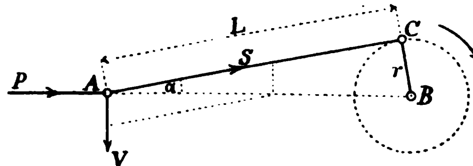
Auflösung.

$$V = 5000 \,.\, \sin 40° = 5000 \,.\, 0{,}64279 = 3214 \text{ kg}$$
$$H = 5000 \,.\, \cos 40° = 5000 \,.\, 0{,}76604 = 3830 \text{ kg}$$

Aufgabe 27. Bei einer Dampfmaschine sei die Länge der Kurbel r = 40 cm, die Länge der Schubstange L = 5 . 40 = 200 cm, der Druck, welcher durch die Kolbenstange auf den Kreuzkopf übertragen wird P = 6280 kg. Wie groß ist der Druck S, den die Schubstange erhält, wie groß der Druck V, mit welchem der Kreuzkopf gegen die Gleitbahn gepreßt wird in dem Augenblicke, wo die Kurbel senkrecht gegen die Schubstange steht? (Fig. 9.)

Auflösung. Man trage die Längen der Kurbel und der Schubstange in einem passenden Maßstabe senkrecht gegeneinander auf. Der Winkel α ergibt sich

Fig. 9.



dabei zu 11° 20′. Durch Zerlegung von P nach den Richtungen AC und senkrecht gegen AB findet man sodann:

$$S = 6405 \text{ kg}$$
$$V = 1256 \text{ kg}$$

Die rechnerischen Ansätze würden sein:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{40}{200} = 0{,}2$$

$$S = \frac{P}{\cos \alpha}; \qquad V = P \operatorname{tg} \alpha$$

§ 5.

Die Leistungen der Kräfte.

Um die Leistung einer Kraft zu beurteilen, muß außer der Größe (Intensität) derselben auch noch der in einer bestimmten Zeit von ihrem Angriffspunkte zurückgelegte Weg bekannt sein.

Wenn z. B. von zwei gleichen Kräften die erste derselben in einer bestimmten Zeit ein und dasselbe Gewicht doppelt so hoch als die zweite hebt, so ist die Leistung der ersten Kraft auch doppelt so groß als die der zweiten.

Allgemein nennt man das Produkt aus der Kraft und dem in der

Richtung derselben zurückgelegten Wege die von der Kraft verrichtete mechanische Arbeit oder kurz:

Mechanische Arbeit = Kraft × Weg.

Wird die Kraft in kg, der Weg in m angegeben, so ist die Arbeitseinheit das mkg.

Befindet sich ein Körper unter Einwirkung mehrerer Kräfte, so wird derselbe im allgemeinen eine Bewegung ausführen, die von der Richtung einer

Fig. 10.

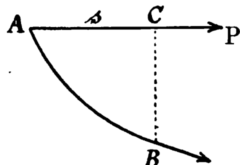
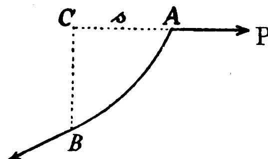
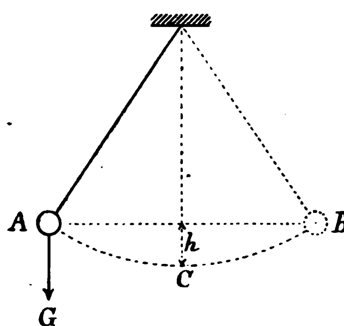


Fig. 11.



der auf ihn wirkenden Kräfte wesentlich abweichen kann. Wenn trotzdem von der mechanischen Arbeit eben dieser Kraft die Rede ist, so versteht man darunter das Produkt aus der Kraft und derjenigen Wegeslänge, welche man vom Anfang der Bewegung aus gerechnet in der Kraftrichtung erhält, wenn man von dem Endpunkte der Bewegung aus eine Senkrechte auf die Kraftrichtung fällt.

Fig. 12.



Bewegt sich z. B. ein Körper unter Einwirkung mehrerer Kräfte von A nach B (Fig. 10) und ist P eine der auf ihn wirkenden Kräfte, so ist, wenn $BC \perp AC$, die von der Kraft P während der Bewegung AB verrichtete mechanische Arbeit:

$$P \cdot \overline{AC} = P \cdot s$$

In Fig. 11 ist, da der während der Bewegung AB zurückgelegte Weg s der Kraftrichtung entgegengesetzt ist, also negativ in Anrechnung gebracht werden muß, die von der Kraft P verrichtete mechanische Arbeit:

$$-P \cdot s$$

Bei einem mathematischen Pendel z. B. ist, wenn mit G das Gewicht der Kugel bezeichnet wird (Fig. 12), die mechanische Arbeit der Schwerkraft:

während der Bewegung $AC = G \cdot h$

" " " $CB = -G \cdot h$

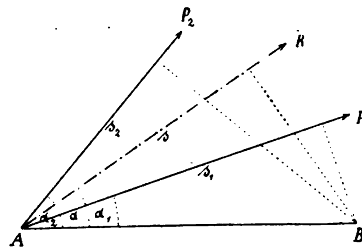
und während einer ganzen Pendelschwingung AB (da die Punkte A und B in gleicher Höhe liegen) = Null.

Ist die Kraft stets senkrecht zur Bewegungsrichtung, so ist der in ihrer Richtung zurückgelegte Weg = Null, sie verrichtet daher gar keine mechanische Arbeit. (Beispiel: Centrifugalpendel, bei welchem die Schwerkraft die mechanische Arbeit Null verrichtet.)

Es sei nun R die Mittelkraft der auf den Körper wirkenden Einzelkräfte $P_1\ P_2 \ldots$ und AB die Bahnlinie des Körpers (Fig. 13).

Bei Zerlegung sämtlicher Kräfte nach beliebigen Richtungen muß dann die in eine bestimmte Richtung hineinfallende Komponente der Mittelkraft gleich

Fig. 13.



sein der Summe der in dieselbe Richtung hineinfallenden Komponenten der Seitenkräfte (vergl. § 7). Für die Richtung AB wird danach:

$$R \cos \alpha = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \ldots..$$

Nach Fig. 13 ist aber:

$$\cos \alpha = \frac{s}{AB}; \quad \cos \alpha_1 = \frac{s_1}{AB}; \quad \cos \alpha_2 = \frac{s_2}{AB}; \ldots.$$

Durch Einsetzung dieser Werte in die vorige Gleichung erhält man, wenn gleichzeitig mit dem gemeinsamen Divisor AB aller Glieder multipliziert wird:

$$\mathbf{R\,s} = \mathbf{P_1\,s_1} + \mathbf{P_2\,s_2} + \ldots \qquad 16)$$

Jedes der Glieder der letzten Gleichung stellt die bei der Bewegung des Körpers von A nach B verrichtete mechanische Arbeit der betreffenden Kraft dar, und die Gleichung lautet danach in Worten:

Die mechanische Arbeit der Mittelkraft ist gleich der Summe der mechanischen Arbeiten der Einzelkräfte.

Eine bestimmte mechanische Arbeit kann nun aber von einer Kraft in kürzerer oder längerer Zeit verrichtet werden und es ist deshalb zur Beurteilung der ganzen Kraftleistung noch erforderlich, die verbrauchte Zeit anzugeben, oder zu bestimmen, wie groß die in der Zeiteinheit (1 sec) verrichtete mechanische Arbeit ist.

Man nennt die in 1 sec verrichtete mechanische Arbeit den Effekt der Kraft. Da nun die mechanische Arbeit = Kraft × Weg, und der in 1 sec zurückgelegte Weg die Geschwindigkeit ist, so kann man kurz sagen:

Effekt = Kraft × Geschwindigkeit

oder wenn der Effekt mit E, die Kraft mit P, die Geschwindigkeit mit v bezeichnet wird:

$$E = Pv \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad 17)$$

Um bei größeren Kräften und bedeutenden Geschwindigkeiten nicht zu große Zahlenwerte zu erhalten, hat man den Begriff der Pferdekraft oder Pferdestärke eingeführt.

Man versteht unter einer Pferdekraft einen Effekt von 75 mkg oder eine mechanische Arbeit von 75 mkg in 1 sec.

In anderen Maßen ist:

1 Pferdekraft = 478 Fßpfd. preußisch
1 „ = 542,5 „ englisch.

Bezeichnet man die Anzahl der Pferdekräfte mit N, so ist:

$$N = \frac{E}{75} = \frac{Pv}{75} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad 18)$$

Für die normale tägliche Leistung tierischer Wesen gilt die Formel:

$$L = Pvt$$

worin zu setzen ist:

	für den Menschen	für ein Pferd
die Kraft . . . P =	10 kg	70 kg
„ Geschwindigkeit v =	0,8 m	1,25 m
„ Zeit . . . . t = 8 Std. = 8 . 60 . 60 = 28 800 sec		

Danach ist die tägliche Leistung eines Menschen:

$$L = 10 \,.\, 0{,}8 \,.\, 28\,800 = 230\,400 \text{ mkg}$$

die tägliche Leistung eines Pferdes:

$$L = 70 \,.\, 1{,}25 \,.\, 28\,800 = 2\,520\,000 \text{ mkg}$$

Häufig kann aber der Mensch oder das Pferd nicht mit mittlerer Geschwindigkeit und Zeit ausgenutzt werden; dann wird ihre Tagesleistung geringer. Ist v_1 die von der mittleren abweichende Geschwindigkeit, t_1 die neue Zeit, so ergibt sich die dann auszuübende Kraft P_1 aus der Formel von Gerstner:*)

$$P_1 = P\left(2 - \frac{v_1}{v}\right)\left(2 - \frac{t_1}{t}\right) \qquad \ldots\ldots \qquad 19)$$

Wird z. B. für einen Arbeiter $v_1 = 1$ m und $t_1 = 10$ Stunden gesetzt, so darf P_1 nicht größer sein als:

$$P_1 = 10\left(2 - \frac{1}{0{,}8}\right)\left(2 - \frac{10}{8}\right) = \backsim 5{,}6 \text{ kg}$$

ohne den Mann zu ruinieren.

---

*) Eine andere Formel (von Maschek) lautet:

$$P_1 = P\left(3 - \frac{v_1}{v} - \frac{t_1}{t}\right)$$

doch ist die Formel von Gerstner im allgemeinen vorzuziehen.

Wirkt die konstante Kraft P auf einen Körper von der Masse m während einer Wegeslänge s, so verrichtet sie nach dem oben Gesagten die mechanische Arbeit Ps. Eine konstante Kraft erzeugt nun aber stets gleichförmig beschleunigte Bewegung, folglich kann, wenn c die Anfangs-, v die Endgeschwindigkeit des Körpers bedeutet, und p die Beschleunigung ist, welche derselbe durch die Kraft P erhält, nach Gl. 6) S. 5 gesetzt werden;

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2p}$$

Nach Gl. 13) S. 12 ist aber:

$$P = mp$$

Durch Multiplikation beider Ausdrücke ergibt sich:

$$\mathbf{Ps} = \frac{\mathbf{mv^2}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{mc^2}}{\mathbf{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 20)$$

Den Ausdruck $\frac{mv^2}{2}$ bezw. $\frac{mc^2}{2}$, d. i. halbe Masse des Körpers, multipliziert mit dem Quadrate der Geschwindigkeit, nennt man die lebendige Kraft oder Arbeitsenergie, welche der Körper in dem Augenblicke besitzt, wo seine Geschwindigkeit = v bezw. c ist.

Hiernach ist in Gl. 20) $\frac{mv^2}{2}$ die lebendige Kraft, welche der Körper am Ende der Bewegung, $\frac{mc^2}{2}$ die lebendige Kraft, welche der Körper am Anfang der Bewegung hat; die Differenz:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2}$$

gibt die Zunahme an lebendiger Kraft an, welche der Körper während der Bewegung erfährt.

Die Gl. 20) enthält daher folgenden wichtigen Lehrsatz:

Die mechanische Arbeit, welche die auf einen Körper wirkende Kraft verrichtet, ist gleich der von ihr hervorgebrachten Zunahme an lebendiger Kraft desselben, oder kurz:

Mechanische Arbeit = Zunahme an lebendiger Kraft.

Hat der Körper die Anfangsgeschwindigkeit Null, so geht Gl. 20) über in:

$$\mathbf{Ps} = \frac{\mathbf{mv^2}}{\mathbf{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21)$$

d. h. die lebendige Kraft, welche der Körper am Ende der Bewegung besitzt, ist gleich der von der Kraft während der Bewegung verrichteten mechanischen Arbeit.

Wirkt die Kraft P der Bewegung entgegen, d. h. tritt sie als Widerstand auf, so wird die Bewegung durch sie gleichförmig verzögert.

Die Gl. 20) nimmt dann (da der Weg s negativ einzusetzen ist) die Form an:

$$-Ps = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2}$$

oder:

$$\mathbf{Ps = \frac{mc^2}{2} - \frac{mv^2}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 22)$$

Es bezeichnet die Differenz:

$$\frac{mc^2}{2} - \frac{mv^2}{2}$$

die Abnahme an lebendiger Kraft, welche der Körper während der Bewegung erfährt (die während der Bewegung verbrauchte lebendige Kraft) und Gl. 22) läßt sich in Worten folgendermaßen ausdrücken:

Widerstand × Weg = verbrauchte lebendige Kraft.

Mittels besonderer Instrumente, der sogen. Dynamometer oder Kraftmesser, läßt sich die zur Ueberwindung eines Widerstandes erforderliche Kraft immer beobachten. (Federdynamometer von Regnier.)

Aufgabe 28. Wie groß ist die mechanische Arbeit, welche erforderlich ist, um ein Gewicht von 800 kg 6 m hoch zu heben?

Auflösung.

$$Ps = 800 \,.\, 6 = 4800 \text{ mkg}$$

Aufgabe 29. Wenn durch eine Dampfwinde eine Last P = 1000 kg in 8 sec 12 m hoch gehoben werden kann, wie groß ist dann der Effekt der Winde?

Auflösung. Die Hubgeschwindigkeit ist:

$$v = \frac{12}{8} = 1{,}5 \text{ m}$$

folglich:

$$E = 1000 \,.\, 1{,}5 = 1500 \text{ mkg}$$

Aufgabe 30. Ein Dampfhammer von 500 kg Gewicht macht pro min 50 Schläge; die Hubhöhe beträgt 75 cm. Es soll der Effekt des Hammers bestimmt werden.

Auflösung. Der Hammer macht pro sec $\frac{50}{60} = {}^5/_6$ Schläge, also ist die Geschwindigkeit:

$$v = {}^5/_6 \,.\, 0{,}75 = 0{,}625 \text{ m}$$

und:

$$E = 500 \,.\, 0{,}625 = 312{,}5 \text{ mkg}$$

Aufgabe 31. Wenn ein Mann mit 20 kg Gepäck auf horizontaler Bahn täglich 8 Stunden mit einer Geschwindigkeit von 1 m zurücklegen kann, welche Last wird er dann 6 Stunden lang mit einer Geschwindigkeit von 0,8 m tragen können, ohne mehr als sonst ermüdet zu sein?

Auflösung. Nach Gl. 19) ist:

$$P_1 = 20\left(2 - \frac{0{,}8}{1}\right)\left(2 - \frac{6}{8}\right) = 30 \text{ kg}$$

Aufgabe 32. Rechnet man für einen Mann an der Kurbel bei anhaltender Arbeit:

$$P = 10 \text{ kg}; \qquad v = 0{,}8 \text{ m}; \qquad t = 8 \text{ Stunden}$$

welche Kraft kann derselbe dann bei gleicher Kurbelgeschwindigkeit $v = 0,8$ m ausüben, wenn er nur sehr kurze Zeit jeweils beschäftigt ist und sich in längeren Pausen wieder ausruhen kann?

Auflösung. Da hier $t_1 =$ Null gesetzt werden kann, so ist:

$$P_1 = 10\left(2 - \frac{0,8}{0,8}\right)\left(2 - 0\right) = 20 \text{ kg}$$

Aufgabe 33. Wenn für ein Pferd die oben Seite 21 angegebenen Werte:

$P = 70$ kg; $v = 1,25$ m; $t = 8$ Stunden

festgehalten werden, wie viel Stunden kann dann ein Pferd mit einem 84 kg schweren Reiter täglich mit derselben Geschwindigkeit v zurücklegen?

Auflösung. Aus:

$$84 = 70\left(2 - \frac{1,25}{1,25}\right)\left(2 - \frac{t_1}{8}\right)$$

ergibt sich:

$$t_1 = 6,4 \text{ Stunden}$$

Aufgabe 34. Die einer Turbine pro sec zuströmende Wassermenge sei $Q = 2$ cbm, das Gefälle $H = 5$ m. Wieviel theoretische Pferdekräfte hat die Turbine?

Auflösung. Da 1 cbm Wasser 1000 kg wiegt, so ist die ganze im Wasser enthaltene Arbeit pro sec oder der Effekt:

$$E = 1000\, Q H$$

folglich:

$$N = \frac{1000\, Q H}{75} = \frac{1000 \,.\, 2 \,.\, 5}{75} = 133^1/_3$$

Aufgabe 35. Bei einer Dampfmaschine sei:

der Kolbendurchmesser $d = 40$ cm
„ Kolbenhub . . . $h = 0,8$ m
„ Dampfdruck . . . $p = 6$ Atm. (6 kg pro qcm)
die Umdrehungszahl . $n = 45$ pro min

Wieviel Pferdekräfte hat dieselbe bei Vollbruck ohne Berücksichtigung der Reibungen?

Auflösung. Der Kolbenquerschnitt ist:

$$\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{40^2 \,.\, 3,14}{4} = 1257 \text{ qcm}$$

Da nun jedes qcm 6 kg Druck erhält, so ist der gesamte Druck auf den Kolben:

$$P = 6 \,.\, 1257 = 7542 \text{ kg}$$

Der Kolben macht bei jeder Umdrehung der Maschine einen Hin- und Hergang, also den Weg 2h; bei n Umdrehungen ist der zurückgelegte Weg $= 2hn$. Dies ist der Weg in 1 min, folglich der Weg in 1 sec oder die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{2hn}{60} = \frac{2 \,.\, 0,8 \,.\, 45}{60} = 1,2 \text{ m}$$

Daher:

$$N = \frac{Pv}{75} = \frac{7542 \,.\, 1,2}{75} = 120,67$$

Aufgabe 36. Eine Kanonenkugel von 50 kg Gewicht habe eine Geschwindigkeit von 400 m. Wie groß ist ihre lebendige Kraft in diesem Augenblick?

Auflösung.

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{G}{g}\,\frac{v^2}{2} = \frac{50}{9,81}\,\frac{400^2}{2} = 407\,747 \text{ mkg}$$

Aufgabe 37. Wieviel mechanische Arbeit gibt ein Schwungrad von 2 m Halbmesser und 6000 kg Gewicht ab, während es von n = 10 Umdrehungen auf $n_1 = 4$ Umdrehungen herabgeht?

Auflösung. Die Masse des Schwungrades ist:

$$m = \frac{6000}{9{,}81} = \backsim 612$$

die Umfangsgeschwindigkeit am Anfang:

$$c = \frac{2 r \pi n}{60} = \frac{2 . 2 . 3{,}14 . 10}{60} = 2{,}1 \text{ m}$$

am Ende:

$$v = \frac{2 r \pi n_1}{60} = \frac{2 . 2 . 3{,}14 . 4}{60} = 0{,}84 \text{ m}$$

folglich nach Gl. 22)

$$P s = \frac{612 . 2{,}1^2}{2} - \frac{612 . 0{,}84^2}{2} = 1134 \text{ mkg}$$

Abschnitt II.

Die Lehre vom Gleichgewicht der auf einen festen Körper wirkenden Kräfte (Statik fester Körper).

§ 6.

Das statische Moment.

Wirkt eine Kraft auf einen um eine feste Achse drehbaren Körper, so wird dieselbe, wenn ihre Richtungslinie außerhalb der Achse liegt, eine Drehung des Körpers hervorzubringen suchen. Das Bestreben, den Körper zu drehen, ist um so größer, je größer die Kraft und je größer deren Abstand von der Drehachse ist. Um die Größe dieses Drehbestrebens durch Zahlen genau ausdrücken zu können, hat man den Begriff des statischen Momentes eingeführt.

Fig. 14.

Man versteht unter dem statischen Moment einer Kraft R (Fig. 14) in Bezug auf eine außerhalb der Kraftrichtung liegende Drehachse C, welche senkrecht zur Kraftebene gerichtet ist, das Produkt aus der Kraft und dem senkrechten Abstande derselben von der Drehachse. Man nennt diesen Abstand l den Hebelarm der Kraft und kann danach kurz sagen:

Moment = Kraft × Hebelarm

oder:

$$\mathfrak{M} = R\,l \qquad 23)$$

Betreffs des Vorzeichens der Momente würde es gleichgültig sein, welche Drehrichtung, ob rechts oder links herum, als die positive eingeführt würde. Wenn aber eine bestimmte Drehrichtung als positiv gilt, so muß die entgegengesetzte als negativ angesehen werden. Man ist übereingekommen, das Moment einer Kraft positiv zu nennen, wenn die Kraft eine Drehung rechts herum,

Fig. 15.

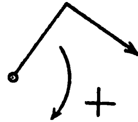
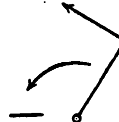


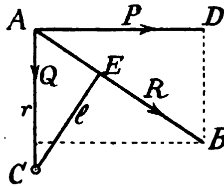
Fig. 16.



also im Sinne der Zeiger einer Uhr hervorzubringen sucht (Fig. 15); das Moment einer Kraft, welche die entgegengesetzte Drehung hervorbringen würde, ist dann negativ (Fig. 16).

Faßt man die Kraft R, deren Angriffspunkt A sein möge (Fig. 17), als Resultierende auf und zerlegt dieselbe in 2 Komponenten Q und P, von denen die eine Q in die Richtung A C fällt, während die zweite P senkrecht dazu gerichtet ist, so kann nur die Komponente P eine Drehung erzeugen, da die Wirkung von Q durch den Widerstand der festen Achse aufgehoben wird.

Fig. 17.



Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke A B D und C A E folgt aber:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{CA}{CE}$$

d. h.:

$$\frac{R}{P} = \frac{r}{l}$$

oder:

$$Rl = Pr$$

in Worten: Das statische Moment der Mittelkraft ist gleich dem statischen Moment derjenigen Komponente, welche senkrecht zu der Verbindungslinie des Angriffspunktes der Kraft mit der Drehachse (also in Fig. 17 senkrecht zu A C) gerichtet ist.

Haben (Fig. 18) die Seitenkräfte P und Q der Kraft R eine solche Lage, daß keine derselben in die Richtung A C hineinfällt, so kann man jede der drei Kräfte R P Q für sich nach den Richtungen A C und senkrecht dazu in ihre Komponenten zerlegen.

Nach Fig. 18 ist die senkrecht zu A C gerichtete Komponente

der Kraft R: $= AB_1$
" " P: $= AD_1$
" " Q: $= AE_1$

Wird die Strecke A C wieder mit r bezeichnet, so ist nach dem vorigen Satze das statische Moment

$$\text{der Kraft } R: \quad \mathfrak{M} = AB_1 \, . \, r$$
$$\text{„ „ } P: \quad \mathfrak{M}_1 = AD_1 \, . \, r$$
$$\text{„ „ } Q: \quad \mathfrak{M}_2 = AE_1 \, . \, r$$

Da nun aber nach Fig. 18

$$AB_1 = AD_1 + AE_1$$

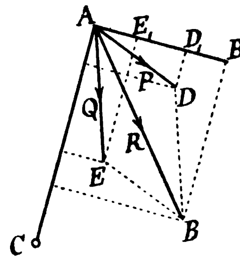
ist, so folgt:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 24)$$

In Worten: **Das statische Moment der Mittelkraft ist gleich der Summe der statischen Momente ihrer Seitenkräfte in Bezug auf eine gegebene Achse.**

Sind mehrere in der Ebene zerstreut liegende Kräfte $P_1 \, P_2 \ldots P_n$ gegeben und ist R deren Gesamtresultierende, so vereinige man zunächst die Kräfte P_1 und P_2 zu der Resultierenden R_{1-2}. Das Moment der letzteren in Bezug auf eine senkrecht zur Kraftebene gerichtete Drehachse ist nach dem vorigen Satze gleich der Summe der Momente der Kräfte P_1 und P_2. Setzt man dann weiter R_{1-2} mit P_3 zu der Resultierenden R_{1-3} zusammen, so ist das Moment von R_{1-3} gleich der Summe der Momente der Kräfte R_{1-2} und P_3, folglich auch gleich der Summe der Momente der Kräfte $P_1 P_2 P_3$. In derselben Weise weiter schließend erhält man den Satz:

Fig. 18.



Das statische Moment der Mittelkraft ist gleich der Summe der statischen Momente aller einzelnen Kräfte in Bezug auf eine gegebene Achse.

Der obige geometrisch geführte Beweis dieses Satzes ist zwar anschaulich, jedoch insofern nicht ganz streng, als das Vorzeichen immer aus der Figur entnommen werden muß. Vollständig scharf ist der Beweis nur analytisch, z. B. in folgender Weise (nach L. Henneberg in Darmstadt) zu führen:

Man denke sich durch den Drehpunkt C ein rechtwinkliges Koordinatensystem so gelegt, daß aus der links von C positiv angenommenen X-Achse durch eine positive Drehung (im Sinne des Uhrzeigers) um 90° die positive Y-Achse entsteht (Fig. 19).

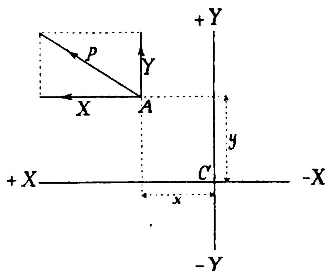
Es möge zunächst eine Kraft P in der Ebene des Koordinatensystems gegeben sein, welche an dem Punkte A angreift. Die Komponenten dieser Kraft in der Richtung der Koordinatenachsen seien X, Y, wobei X und Y positiv sind, wenn dieselben die Richtung der positiven Achsen haben, im anderen Falle negativ. Werden die Koordinaten des Punktes A mit xy bezeichnet, so ist das Moment der Komponenten in Bezug auf den Drehpunkt C:

$$\mathfrak{M} = xY \pm yX$$

Dieser Ausdruck wird positiv oder negativ sein, je nachdem der Drehungssinn der Kraft P positiv oder negativ ist, stellt also ganz allgemein das Moment einschließlich des Vorzeichens dar.

An dem Punkte A sollen nun mehrere in der Ebene des Koordinatensystems liegende Kräfte $P_1 P_2 P_3 \ldots$ angreifen, deren Resultierende R sein möge. Sämtliche Kräfte seien in Komponenten nach der Richtung der Koordinatenachsen zerlegt, und zwar:

Fig. 19.



die Kraft P_1 in die Komponenten $X_1 Y_1$
" " P_2 " " " $X_2 Y_2$
. . . .

Die Komponenten der Resultierenden R sind dann:

$$R_x = \Sigma(X)$$
$$R_y = \Sigma(Y)$$

Daraus ergibt sich das Moment:

$$\mathfrak{M} = x\,\Sigma(Y) \pm y\,\Sigma(X)$$

Nun ist das Moment

der Kraft P_1: $\mathfrak{M}_1 = x Y_1 \pm y X_1$
" " P_2: $\mathfrak{M}_2 = x Y_2 \pm y X_2$
. . . .

Die Summe aus den Momenten sämtlicher Kräfte P ist demgemäß:

$$\mathfrak{M} = \Sigma(xY \pm yX) = x\,\Sigma(Y) \pm y\,\Sigma(X)$$

also übereinstimmend mit dem Momente der Resultierenden.

§ 7.

Gleichgewichtsbedingungen für einen festen Körper.

Ein Körper befindet sich im Gleichgewichte, wenn er durch die auf ihn wirkenden Kräfte in seiner geradlinig gleichförmigen Bewegung, oder, wenn er in Ruhe war, in seiner Ruhe nicht gestört wird.

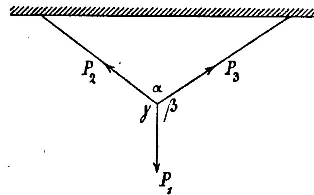
Die an einem Körper angreifenden Kräfte befinden sich im Gleichgewichte, wenn deren Wirkungen auf den Körper sich gegenseitig aufheben.

Da jede einzelne Kraft für sich allein eine Bewegungsänderung des Körpers zur Folge haben würde, so kann ein Körper sich nur dann im Gleichgewichte befinden, wenn die Mittelkraft sämtlicher auf ihn einwirkender Kräfte = Null ist.

Zwei Kräfte heben einander auf (sind gleichwertig oder äquivalent), wenn sie gleiche Größe, aber entgegengesetzte Richtung haben. Mehrere auf einen Körper wirkende Kräfte können daher nur dann im Gleichgewichte sein, wenn jede derselben mit der Mittelkraft aller übrigen gleiche Größe, aber entgegengesetzte Richtung hat.

Wirken z. B. drei Kräfte, die sich im Gleichgewichte halten, auf einen Körper, so muß jede derselben mit der Resultierenden der anderen beiden Kräfte gleiche Größe und entgegengesetzte Richtung haben. Die drei Kräfte müssen sich daher in einem Punkte schneiden, und ihre Größen verhalten sich wie die sinus-Zahlen der gegenüberliegenden Winkel (Fig. 20).

Fig. 20.



$$P_1 : P_2 : P_3 = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

Liegen sämtliche Kräfte in derselben geraden Linie, so muß für den Fall des Gleichgewichts die Summe der nach einer Richtung hin wirkenden Kräfte gleich sein der Summe der nach der entgegengesetzten Richtung hin wirkenden Kräfte. Führt der Körper dabei eine gleichförmig fortschreitende Bewegung aus, so nennt man die der Bewegung entgegengesetzt gerichteten Kräfte den Widerstand, im Gegensatz zu den bewegenden Kräften. Der Gleichgewichtszustand für diesen Fall kann dann kurz durch die Bedingung ausgedrückt werden:

Kraft = Widerstand

Befindet sich ein Körper unter Einwirkung mehrerer verschieden gerichteter Kräfte im Gleichgewichte, so muß nach einer (übrigens beliebigen) Richtung hin gerade so viel Kraft wirken, als nach der entgegengesetzten Richtung; es darf nach keiner Richtung hin ein Ueberschuß von Kraft vorhanden sein. Es muß daher, wenn man die Kräfte nach bestimmten Achsenrichtungen zerlegt, die algebraische Summe (d. h. die mit Rücksicht auf das Vorzeichen genommene Summe) der in eine Achsenrichtung hinein fallenden Seitenkräfte = Null sein.

Wenn aber die letzte Bedingung auch erfüllt ist, so läßt sich umgekehrt daraus noch nicht der Schluß ziehen, daß der Körper dann sich auch im Gleichgewichtszustande befindet. Um im Gleichgewichte zu sein, darf derselbe unter der Einwirkung der Kräfte auch keine Drehbewegung ausführen. Das Bestreben einiger der Kräfte, den Körper nach der einen Richtung zu drehen, muß daher aufgehoben werden durch das ebenso große Bestreben der übrigen Kräfte, dem Körper die entgegengesetzte Drehung zu erteilen, oder: die Summe der statischen Momente der nach einer Richtung hin drehenden Kräfte muß gleich sein der Summe der statischen Momente der nach der entgegengesetzten Richtung hin drehenden Kräfte in Bezug auf eine bestimmte Achse.

Für den Fall, daß sämtliche Kräfte in einer Ebene liegen, und daß dieselben in horizontale und vertikale Komponenten zerlegt werden, daß ferner die Drehachse senkrecht zu der Kraftebene gerichtet ist, lauten danach die Gleichgewichtsbedingungen für einen festen Körper:

1. Die algebraische Summe der Horizontalkräfte muß = Null sein.

2. Die algebraische Summe der Vertikalkräfte muß = Null sein.
3. Die algebraische Summe der statischen Momente muß = Null sein.

§ 8.

Zusammensetzung mehrerer in derselben Ebene wirkender Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten.

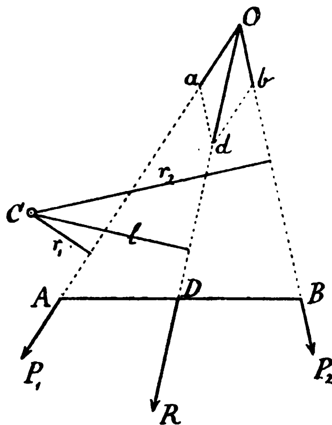
Die Regeln, nach denen zwei Kräfte, welche sich in einem Punkte schneiden, zu einer Resultierenden zusammenzusetzen sind, wurden bereits unter 4. § 4 (S. 15 und 16) gegeben.

Für die Zusammensetzung zweier in derselben Ebene wirkender Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten gilt die Regel:

Man verlängere die Richtungslinien der beiden Kräfte bis zu ihrem Schnittpunkt und konstruiere dort das Kräfteparallelogramm, denn:

Man kann den Angriffspunkt einer Kraft beliebig in der Richtungslinie derselben verschieben, wenn nur der neue Angriffspunkt unveränderlich mit dem ersteren verbunden ist. (Beispiel: Strick, an welchem eine Zugkraft angreift.)

Fig. 21.



Es seien z. B. die einem festen Körper angehörenden, unveränderlich miteinander verbundenen Punkte A und B die Angriffspunkte der Kräfte P_1 und P_2, welche verlängert sich im Punkte O schneiden (Fig. 21). Verschiebt man die Angriffspunkte A und B nach O, betrachtet also O als gemeinsamen Angriffspunkt der Kräfte P_1 und P_2 und konstruiert das Parallelogramm O a d b mit den Seiten $Oa = P_1$ und $Ob = P_2$, so ist die Diagonale O d gleich der gesuchten Resultierenden R, deren Angriffspunkt wieder beliebig in ihrer Richtung verschoben, z. B. nach dem auf der Verbindungslinie A B liegenden Punkte D verlegt werden kann.

Mit Hilfe des Satzes, daß das statische Moment der Mittelkraft gleich ist der Summe der statischen Momente ihrer Seitenkräfte, läßt sich die Resultierende R auch dann bestimmen, wenn der Schnittpunkt O der Kräfte P_1 und P_2 außerhalb der Bildfläche liegt. In Bezug auf den beliebig gewählten Drehpunkt C (Fig. 21) ist:

$$\mathbf{R}\,\mathbf{l} = \mathbf{P}_1\mathbf{r}_1 + \mathbf{P}_2\mathbf{r}_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 25)$$

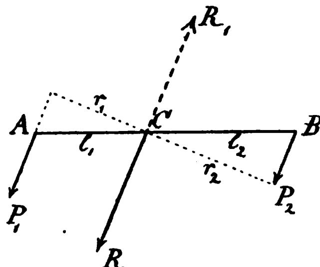
Die Lage von R folgt dann aus der Bedingung, daß sie den senkrechten Abstand

$$l = \frac{P_1 r_1 + P_2 r_2}{R}$$

von dem Drehpunkt C haben muß. Größe und Richtung von R gibt die Diagonale des aus den Kräften P_1 und P_2 an beliebiger Stelle konstruierten Parallelogramms an.

Eine besondere Erwähnung verdient noch der spezielle Fall, wo die Kräfte P_1 und P_2 einander parallel sind (Fig. 22). Das Parallelogramm aus P_1 und P_2 schrumpft hier zu einer geraden Linie zusammen. Daraus folgt, daß die Resultierende R dieselbe Richtung hat wie die Kräfte P_1 und P_2 und gleich deren Summe ist.

Fig. 22.



$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \quad \ldots \quad 26)$$

Da bei Aufstellung der Gleichung der statischen Momente die Lage der Drehachse willkürlich ist, so kann hier der Durchschnittspunkt C der Resultierenden R mit der Verbindungslinie der beiden Angriffspunkte A und B als Drehachse gewählt werden (Fig. 22).

Ersetzt man die Resultierende R durch die gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft R_1, so befindet sich das System im Gleichgewichte und es lassen sich daher die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen darauf anwenden. Nach der Gleichgewichtsbedingung 3. § 7, S. 30 ist dann:

$$-P_1 r_1 + P_2 r_2 = 0$$

oder:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

und da

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{l_2}{l_1}$$

ist, so wird:

$$\frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{P}_2} = \frac{\mathbf{l}_2}{\mathbf{l}_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 27)$$

Die Resultierende teilt also die Verbindungslinie AB im umgekehrten Verhältnis der Seitenkräfte. Hieraus ergibt sich die Lage des Punktes C.

Sind mehr als zwei parallele Kräfte gegeben, so kann man zur Bestimmung der Resultierenden derselben das eben angegebene Verfahren in der Weise wiederholen, daß man aus der Mittelkraft zweier Parallelkräfte und einer dritten wieder eine Mittelkraft bildet, diese dann mit einer vierten Kraft zusammensetzt u. s. w.

Auch für beliebig viele in derselben oder in verschiedenen Ebenen wirkende Parallelkräfte gilt dann der Satz:

Die Mittelkraft gleichgerichteter Parallelkräfte ist gleich deren Summe und hat dieselbe Richtung.

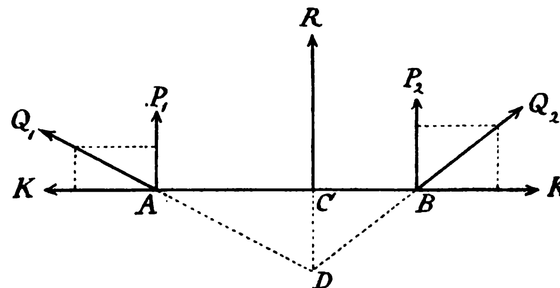
Ist R die Mittelkraft der parallelen Kräfte $P_1 P_2 P_3 \ldots$, deren senkrechte Abstände von einer beliebigen Ebene $x_1 x_2 x_3 \ldots$ sein mögen, und bezeichnet man mit x_0 den senkrechten Abstand der Kraft R von derselben Ebene, so ist nach dem Satze von dem statischen Moment (S. 27):

$$\mathbf{R x_0 = P_1 x_1 + P_2 x_2 = P_3 x_3 +} \quad \ldots \ldots \quad 28)$$

Das statische Moment der Mittelkraft paralleler Kräfte in Bezug auf eine beliebige Ebene ist gleich der Summe der statischen Momente aller Einzelkräfte in Bezug auf dieselbe Ebene.

Man kann die Lage der Mittelkraft zweier paralleler Kräfte auch dadurch bestimmen, daß man an den Angriffspunkten A und B der Kräfte P_1

Fig. 23.



und P_2 und in der Richtung AB noch zwei beliebig große, aber gleiche und entgegengesetzt gerichtete, sich also gegenseitig aufhebende Kräfte K hinzufügt (Fig. 23).

Setzt man diese Kräfte K mit P_1 und P_2 zu den Resultierenden Q_1 bezw. Q_2 zusammen und verlängert die Richtungslinien der letzteren bis zu dem Schnittpunkt D, so ist damit ein Punkt gefunden, durch welchen die Resultierende R der Kräfte P_1 und P_2 hindurchgehen muß.

Dasselbe Verfahren kann benutzt werden zur Bestimmung der Resultierenden R von zwei entgegengesetzt gerichteten Parallelkräften P_1 und P_2 von ungleicher Größe (Fig. 24).

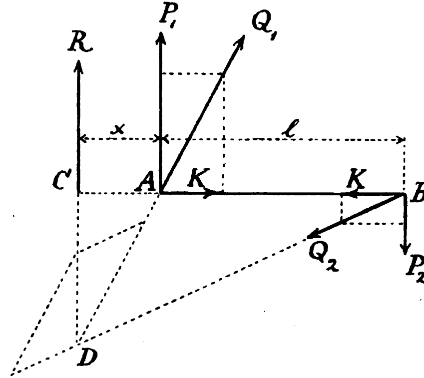
Die Resultierende hat hier den Wert:

$$\mathbf{R = P_1 - P_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 29)$$

Nimmt man die Richtung von P_1 als die positive an und ist $P_1 > P_2$, so ist auch R positiv, hat also die Richtung von P_1. Ist dagegen $P_2 > P_1$, so ist R negativ, hat folglich die Richtung von P_2.

Die Mittelkraft von zwei entgegengesetzt gerichteten Parallelkräften von ungleicher Größe ist gleich deren Differenz und hat die Richtung der größeren.

Fig. 24.



Die Lage von R ergibt sich aus der Momentengleichung (Drehpunkt C):

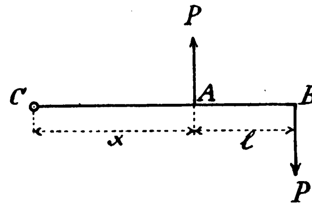
$$-P_1 x + P_2 (l + x) = 0$$

woraus durch Auflösung für x folgt:

$$x = \frac{P_2}{P_1 - P_2} l \quad \ldots\ldots\ldots \quad 30)$$

Sind die entgegengesetzt gerichteten Parallelkräfte einander gleich ($P_1 = P_2 = P$), so hat deren Resultierende (als Differenz der gleich großen Kräfte P) die Größe Null und nach der letzten Gleichung wird $x = \infty$. Daraus folgt der Satz:

Fig. 25.



Zwei gleich große entgegengesetzt gerichtete Parallelkräfte lassen sich nicht durch eine Mittelkraft ersetzen, sondern bilden ein Kräftepaar von konstantem Momente.

Ist nämlich (Fig. 25) $AB \perp P$ (was sich stets durch Verschiebung des Angriffspunktes einer der Kräfte P in ihrer Richtungslinie erreichen läßt) und man stellt die Gleichung der statischen Momente auf in Bezug auf einen in der Richtung AB liegenden Drehpunkt C, der die beliebige Entfernung x vom Punkte A haben möge, so erhält man:

$$\mathfrak{M} = -Px + P(l + x)$$

oder:

$$\mathfrak{M} = Pl \quad \ldots\ldots\ldots \quad 31)$$

Das Moment des Kräftepaares ist also unabhängig von x und hat stets den konstanten Wert: Kraft multipliziert mit dem senkrechten Abstande der

beiden Kräfte voneinander, oder wenn dieser Abstand wieder der **Hebelarm** des Kräftepaares genannt wird:

Moment = Kraft × Hebelarm

Ueber die in einer und derselben Ebene wirkenden Kräftepaare sind folgende Sätze zu merken:

Die Wirkungen zweier Kräftepaare von gleichen Momenten und gleicher Drehrichtung stimmen überein.

Zwei Kräftepaare von gleichen Momenten und entgegengesetzten Drehrichtungen halten einander im Gleichgewicht.

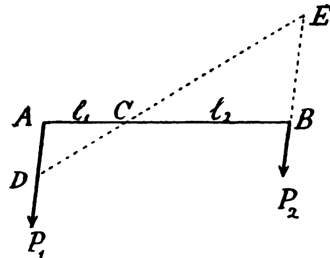
Mehrere Kräftepaare lassen sich ersetzen durch ein resultierendes Kräftepaar, dessen Moment gleich ist der algebraischen Summe der Momente der gegebenen Kräftepaare.

Mehrere Kräftepaare sind daher im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe ihrer Momente gleich Null ist, d. h. wenn die Momentensumme der nach einer Richtung hin drehenden Kräftepaare gleich ist der Momentensumme der nach der entgegengesetzten Richtung hin drehenden Kräftepaare.

Aufgabe 38. Es soll die Lage der Mittelkraft von zwei gleichgerichteten Parallelkräften P_1 und P_2 durch Konstruktion bestimmt werden.

Auflösung. Man verbinde die Angriffspunkte A und B der Kräfte P_1 und P_2 durch die Gerade AB (Fig. 26), mache $AD = P_2$ und $BE = P_1$ und ziehe die Gerade DE, welche die AB im Punkte C schneidet. Nach Gl. 27) S. 31 ist dann C ein Punkt in der Richtungslinie der Mittelkraft aus P_1 und P_2, denn in den ähnlichen Dreiecken BCE und ACD verhält sich:

Fig. 26.



$$\frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC}$$

oder:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

Aufgabe 39. Es soll die Lage der Mittelkraft R von zwei entgegengesetzt gerichteten, ungleich großen Parallelkräften P_1 und P_2 durch Konstruktion gefunden werden.

Auflösung. (Fig. 27.) Man ziehe AB, mache $AD = P_2$ und $BE = P_1$ und ziehe die Gerade ED, deren Richtung die verlängerte AB in C schneidet. Die Lage der den Kräften P_1 und P_2 parallelen Mittelkraft R ist dadurch bestimmt, daß dieselbe durch den Punkt C hindurchgehen muß.

Der Beweis folgt, wenn man noch die Hilfslinie $DF \parallel AB$ zieht, aus Fig. 27 und Gl. 30).

Aufgabe 40. Zwei parallele gleichgerichtete Kräfte $P_1 = 20$ kg und $P_2 = 50$ kg wirken an zwei im Abstande von 2,1 m fest miteinander verbundenen Punkten A und B. Wie groß ist die Resultierende R und wie groß sind die Abschnitte l_1 und l_2, in welche dieselbe die Strecke AB zerlegt?

Auflösung.

$$R = P_1 + P_2 = 20 + 50 = 70 \text{ kg}$$

Nach Gl. 27) S. 31 ist:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{20}{50} = 0{,}4$$

also:

$$l_2 = 0{,}4\, l_1$$

Außerdem ist:

$$l_1 + l_2 = 2{,}1 \text{ m}$$

und wenn hierin der für l_2 gefundene Wert eingesetzt wird:

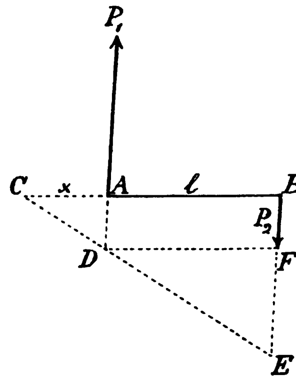
$$l_1 + 0{,}4\, l_1 = 2{,}1 \text{ m}$$

$$l_1 = \frac{2{,}1}{1{,}4} = 1{,}5 \text{ m}$$

danach:

$$l_2 = 2{,}1 - l_1 = 2{,}1 - 1{,}5 = 0{,}6 \text{ m}$$

Fig. 27.



Aufgabe 41. Eine Kraft $P = 16$ kg wirkt an einem Hebelarm $l = 1{,}2$ m. Wie groß muß die Kraft P_1 sein, welche, an einem Hebelarme $l_1 = 0{,}8$ m wirkend, dasselbe Drehmoment erzeugen würde?

Auflösung.

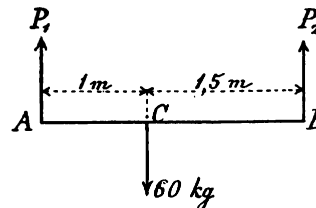
$$P_1\, l_1 = P\, l$$

folglich:

$$P_1 = \frac{P\, l}{l_1} = \frac{16 \,.\, 1{,}2}{0{,}8} = 24 \text{ kg}$$

Aufgabe 42. Eine horizontale Stange AB, welche in C durch ein Gewicht $Q = 60$ kg belastet ist, ist an ihren Endpunkten unterstützt. Wie groß sind die in A und B wirkenden Drücke P_1 und P_2, wenn $AC = 1$ m, $CB = 1{,}5$ m ist und wenn die Stange selbst als gewichtslos betrachtet wird?

Fig. 28.



Auflösung. (Fig. 28.) Stellt man die Momentengleichung in Bezug auf den Drehpunkt B auf, so liefert die Kraft P_2 keinen Beitrag, da deren Hebelarm = Null ist. Man erhält:

$$P_1 \,.\, 2{,}5 - 60 \,.\, 1{,}5 = 0$$

daraus:

$$P_1 = \frac{60 \,.\, 1{,}5}{2{,}5} = 36 \text{ kg}$$

Die Momentengleichung in Bezug auf den Drehpunkt A lautet:

$$60 \,.\, 1 - P_2 \,.\, 2{,}5 = 0$$

folglich:

$$P_2 = \frac{60 \,.\, 1}{2{,}5} = 24 \text{ kg}$$

§ 9.

Vom Schwerpunkt.

Jeder Körper kann betrachtet werden als zusammengesetzt aus einzelnen materiellen Punkten oder Massenteilchen, deren Summe die ganze Masse des Körpers ausmacht. Die Gewichte der einzelnen Massenteilchen sind Kräfte, welche nach dem Erdmittelpunkt gerichtet sind, die man aber wegen der geringen Ausdehnung der in Betracht zu ziehenden Körper im Vergleich zu dem Erdhalbmesser (im Mittel = 6370000 m) als vertikal abwärts gerichtete Parallelkräfte ansehen darf. Die Mittelkraft der Gewichte der sämtlichen Massenteilchen ist daher, als Mittelkraft gleich gerichteter Parallelkräfte (der Schwerkräfte), gleich deren Summe, d. h. gleich dem Gewichte des ganzen Körpers. Diese Mittelkraft geht, in welche Lage man den Körper auch bringen möge, immer durch ein und denselben Punkt, den Schwerpunkt.

Fig. 29 a.

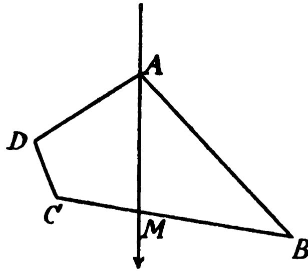
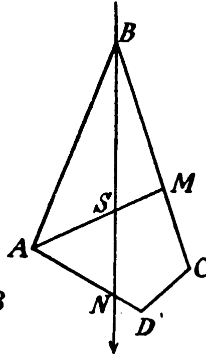


Fig. 29 b.



Der Schwerpunkt ist also derjenige Punkt, in welchem man sich das ganze Gewicht des Körpers vereinigt denken kann und bei dessen Unterstützung der Körper sich in jeder Lage im Gleichgewichte befindet.

Wird der Körper in irgend einem anderen Punkte unterstützt, so findet nur dann Gleichgewicht statt, wenn der Unterstützungspunkt in der Vertikalen des Schwerpunktes liegt. Aus dieser Lage herausgebracht und darauf losgelassen, dreht sich der Körper um den Unterstützungspunkt, bis der Schwerpunkt unterhalb desselben wieder in die durch den Unterstützungspunkt gelegte Vertikale gelangt.

Hierauf beruht die experimentelle Ermittelung des Schwerpunktes unregelmäßig begrenzter oder auch solcher Körper, deren Dichtigkeit nicht überall die gleiche ist. Man hängt den betr. Körper, z. B. eine dünne Platte ABCD an einem Punkte A mittels eines Fadens auf (Fig. 29 a). Der Schwerpunkt S

wird dann, wenn der Körper zur Ruhe gekommen ist, auf der durch A gezogenen Vertikalen A M, also in der Verlängerung des Fadens liegen.

Hängt man alsdann den Körper an einem anderen Punkte B auf (Fig. 29 b), so enthält die durch B gezogene Vertikale B N ebenfalls den Schwerpunkt, so daß dieser selbst im Durchschnittspunkte S der Geraden A M und B N liegt.

Eine Linie, welche den Schwerpunkt enthält, wie z. B. hier jede der Geraden A M und B N, wird Schwerlinie genannt.

Zur Bestimmung des Schwerpunktes eines Körpers durch Rechnung kann die Gl. 28) S. 32 benutzt werden, wenn darin statt R das Gewicht des ganzen Körpers, statt $P_1 P_2 \ldots$ die Gewichte der einzelnen Massenteilchen eingesetzt werden. Bezeichnet man mit $m_1 m_2 \ldots$ die Massenteilchen des Körpers, mit M deren Summe, mit $x_1 x_2 \ldots$ ihre senkrechten Entfernungen von einer beliebigen Ebene und mit x_0 die senkrechte Entfernung des Schwerpunktes des Körpers von dieser Ebene, so ist zu setzen (vergl. Gl. 15, S. 13):

$$R = M g$$
$$P_1 = m_1 g$$
$$P_2 = m_2 g$$
$$\ldots\ldots$$

wodurch Gl. 28) übergeht in:

$$M g x_0 = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 + \ldots$$

oder:

$$\mathbf{M x_0 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots} \quad \ldots\ldots \quad 32)$$

Allgemein kann das Produkt m x, d. i. Massenteilchen multipliziert mit seinem Abstande von einer Ebene, das statische Moment des Massenteilchens in Bezug auf diese Ebene genannt werden. Bezeichnet man die Summe aller dieser Produkte durch $\Sigma(m x)$, so folgt aus Gl. 32):

$$\mathbf{x_0 = \frac{\Sigma(m x)}{M}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 33)$$

Der Abstand des Schwerpunktes eines Körpers von irgend einer Ebene ist gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Massenteilchen, dividiert durch die Masse des ganzen Körpers.

Bei einem homogenen (gleichförmig dichten) Körper verhalten sich die Raumteile wie die Massenteile. Ist daher V das Volumen des ganzen Körpers, $v_1 v_2 \ldots$ die Volumina seiner einzelnen Teile, so kann man für einen homogenen Körper der Gl. 32) auch die Form geben:

$$V x_0 = v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + \ldots$$

Hat der homogene Körper die Gestalt einer ebenen Platte von überall gleicher Dicke, bei welcher sich die Raumteile wie die Flächenteile verhalten, und ist F die ganze Fläche, $f_1 f_2 f_3 \ldots$ die Teilflächen, so erhält man aus der letzten Gleichung:

$$\mathbf{F x_0 = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \ldots} \quad \ldots\ldots \quad 34)$$

Obgleich das statische Moment definiert wurde als das Produkt Kraft mal Hebelarm, so kann man doch auch von dem statischen Momente einer Fläche reden, indem man die Fläche als gleichförmig mit Masse erfüllt ansieht und als Gewicht auffaßt, welches im Schwerpunkte der Fläche angreift. Gl. 34) sagt danach aus:

Das statische Moment der ganzen Fläche ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der einzelnen Flächen in Bezug auf eine gegebene Achse.

Gl. 34) kann benutzt werden zur Bestimmung der Lage des Schwerpunktes einer ebenen Figur, die zusammengesetzt gedacht werden kann aus einzelnen Teilen mit bekanntem Schwerpunkt.

Ist die Achse eine Schwerachse, d. h. geht sie durch den Schwerpunkt der Figur, so ist $x_0 =$ Null, folglich nach Gl. 34):

$$\mathfrak{f}_1 x_1 + \mathfrak{f}_2 x_2 + \mathfrak{f}_3 x_3 + \ldots = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 35)$$

In Worten: Die algebraische Summe der statischen Momente der einzelnen Flächenteile in Bezug auf die Schwerachse ist gleich Null.

Ist daher eine Symmetrieachse oder Symmetrieebene vorhanden, so liegt in dieser immer der Schwerpunkt.

Hat der Körper, dessen Schwerpunkt zu bestimmen ist, die Gestalt einer Linie, so versteht man darunter eine Aneinanderreihung von materiellen Punkten, oder eine Linie mit darüber gleichmäßig verteilter Masse, wie dies z. B. bei einem dünnen Drahte annähernd der Fall ist.

§ 10.

Schwerpunktsbestimmungen von Linien, Flächen, Körpern.

1. Schwerpunkte von Linien.

Gerade Linie.

Der Schwerpunkt einer (materiellen) geraden Linie liegt im Halbierungspunkte derselben.

Kreisbogen.

Der Schwerpunkt S eines Kreisbogens AB (Fig. 30) liegt auf dem den Bogen halbierenden Radius $CM = r$ und in einer Entfernung x_0 vom Kreismittelpunkte C, die folgendermaßen bestimmt wird:

Denkt man sich den Bogen AB in sehr viele kleine Teile zerlegt und stellt die statischen Momente derselben in Bezug auf die durch den Punkt C parallel zu der Sehne AB gezogene Gerade YY auf, so muß (nach Gl. 34) die Summe aller dieser statischen Momente gleich sein dem statischen Momente des ganzen Bogens.

Es sei m n (Fig. 30) ein solches sehr kleines Bogenstück und $nE = x$ dessen Abstand von der YY, so ist sein statisches Moment $= mn \,.\, x$ und die Summe der statischen Momente sämtlicher Bogenstücke $= \Sigma(mn \,.\, x)$. Zieht man $mo \parallel AB$ und noch die Hilfslinie Cn, so verhält sich in den ähnlichen Dreiecken m n o und C n E:

$$\frac{mn}{mo} = \frac{Cn}{En} = \frac{r}{x}$$

folglich:

$$mn \,.\, x = mo \,.\, r$$

Dieselbe Beziehung gilt für jedes andere kleine Bogenstück, daher:

$$\Sigma(mn \,.\, x) = \Sigma(mo \,.\, r) = r\,\Sigma(mo)$$

oder da:

$$\Sigma(mo) = \overline{AB} \text{ ist:}$$

so wird:

$$\Sigma(mn \,.\, x) = r \,.\, \overline{AB}$$

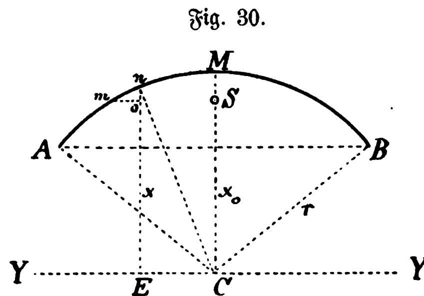


Fig. 30.

Da nun das statische Moment des ganzen Bogens $= \widehat{AB} \,.\, x_0$ ist, so erhält man:

$$\widehat{AB} \,.\, x_0 = r \,.\, \overline{AB}$$

woraus folgt, wenn noch die Länge des Bogens $\widehat{AB}$ mit b, die Länge der Sehne $\overline{AB}$ mit s bezeichnet wird:

$$x_0 = \frac{\mathbf{rs}}{\mathbf{b}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 36)$$

Für den Halbkreis ist $s = 2r$ und $b = r\pi$, folglich:

$$x_0 = \frac{2\mathbf{r}}{\pi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 37)$$

2. Schwerpunkte von Flächen.

Dreieck.

Der Schwerpunkt eines Dreiecks A B C (Fig. 31) liegt auf der Geraden C D, welche von der Spitze C des Dreiecks nach der Mitte D der gegenüberliegenden Seite A B gezogen ist.

Denkt man sich nämlich das Dreieck A B C durch parallel zu A B gezogene Linien in sehr schmale Streifen zerlegt, so liegen deren Schwerpunkte sämtlich in der Linie C D.

Aus demselben Grunde enthält auch die von der Spitze A nach der Mitte E der gegenüberliegenden Seite B C gezogene Gerade A E den Schwerpunkt, folglich muß derselbe mit dem Schnittpunkte S der beiden Linien C D und A E zusammenfallen.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke DES und ACS folgt:

$$DS : SC = DE : AC$$

Da nun:

$$DE = \frac{1}{2} AC$$

ist, so folgt:

$$DS = \frac{1}{2} SC = \frac{1}{3} DC$$

Der Schwerpunkt eines Dreiecks liegt danach auf der Mittellinie und im ersten Drittel der Höhe.

Nach dem obigen Beweise wird der Schwerpunkt eines Dreiecks auch bestimmt durch den Schnittpunkt der im ersten Drittel der Höhe zu den Dreiecks-

Fig. 31.

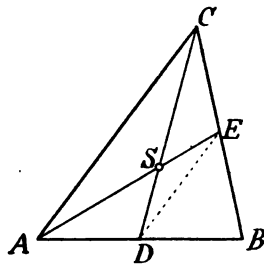
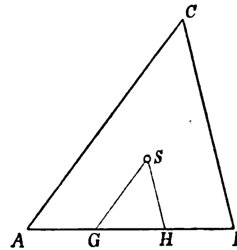


Fig. 32.



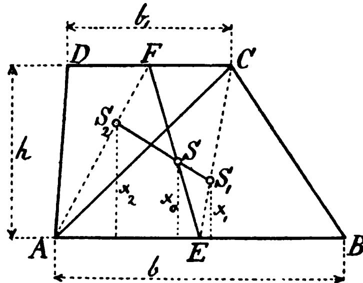
seiten gezogenen Parallelen. Da durch die letzteren die Dreiecksseiten selbst in drei gleiche Teile geteilt werden, so folgt daraus der Satz:

Die durch die Drittelspunkte einer Dreiecksseite zu den beiden anderen Seiten gezogenen Parallelen schneiden sich im Schwerpunkte S (Fig. 32).

Parallelogramm.

Die Diagonalen bilden Schwerlinien, da durch dieselben das Parallelogramm in je zwei kongruente Dreiecke zerlegt wird. Der Schwerpunkt fällt mit dem Schnittpunkt der Diagonalen zusammen.

Fig. 33.



Paralleltrapez.

Der Schwerpunkt eines Trapezes ABCD (Fig. 33) liegt auf der Geraden EF, welche die Mitten der parallelen Seiten AB und CD miteinander verbindet. Eine andere Schwerlinie erhält man, wenn man die Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Dreiecke ABC und ACD, in welche sich das Trapez durch die Diagonale AC zerlegen läßt, miteinander verbindet. Der Schwerpunkt S ist der Schnittpunkt der $S_1 S_2$ mit der EF.

Bezeichnet man den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit F_1, des Dreiecks ACD mit F_2 und sind $x_0 x_1 x_2$ die senkrechten Abstände der Schwerpunkte $S S_1 S_2$ von der Achse AB, so ist nach Gl. 34) S. 37:

$$x_0 (F_1 + F_2) = F_1 x_1 + F_2 x_2$$

Setzt man hierin die Werte ein:

$$F_1 = \frac{b h}{2}; \qquad F_2 = \frac{b_1 h}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{3} h; \qquad x_2 = \frac{2}{3} h$$

so folgt:

$$x_0 = \frac{h}{3} \frac{b + 2 b_1}{b + b_1}$$

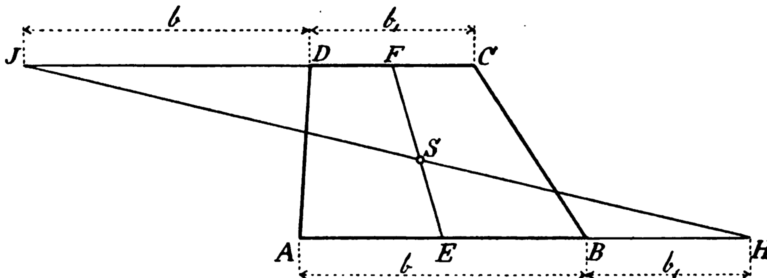
oder:

$$\frac{\mathbf{x_0}}{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{ES}}{\mathbf{EF}} = \frac{\mathbf{b + 2 b_1}}{\mathbf{3 (b + b_1)}} \quad \ldots \ldots \quad 38)$$

Hieraus ergibt sich eine zweite (einfachere) Konstruktion des Schwerpunktes S.

Man verlängere (Fig. 34) jede der parallelen Seiten AB und CD nach entgegengesetzten Richtungen um eine Strecke gleich der anderen Seite, mache

Fig. 34.



also $BH = b_1$ und $DJ = b$. Der Schnittpunkt S der Verbindungslinie HJ mit der Mittellinie EF ist der Schwerpunkt des Trapezes, denn:

$$\frac{ES}{FS} = \frac{EH}{FJ} = \frac{\frac{b}{2} + b_1}{\frac{b_1}{2} + b}$$

woraus übereinstimmend mit Gl. 38) folgt:

$$\frac{ES}{EF} = \frac{ES}{ES + SF} = \frac{\frac{b}{2} + b_1}{\frac{b}{2} + b_1 + \frac{b_1}{2} + b} = \frac{b + 2 b_1}{3 (b + b_1)}$$

Die Konstruktion Fig. 34 läßt sich noch auf andere Art folgendermaßen direkt beweisen:

Man zerlege das Trapez ABCD (Fig. 35) durch die Gerade CK || AD in das Parallelogramm AKCD und das Dreieck KCB. Bestimmt man sodann die Schwerpunkte S_1 und S_2 dieser Figuren in bekannter Weise, so wird der Schwerpunkt S des Trapezes auf der Verbindungslinie $S_1 S_2$ liegen. Man verlängere die Gerade $S_1 S_2$ nach beiden Richtungen hin bis zu den Schnittpunkten H und J mit den verlängerten parallelen Trapezseiten AB und CD. Die vorläufig noch unbekannten Abschnitte auf letzteren seien:

$$BH = x$$
$$DJ = y$$

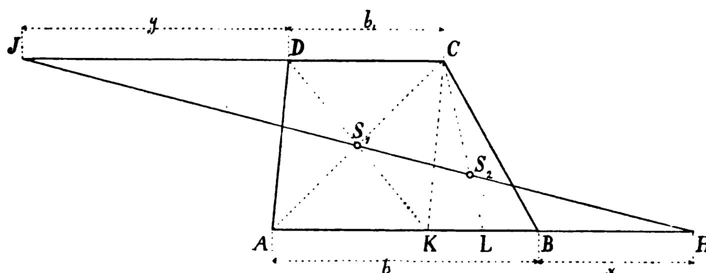
Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke LHS_2 und CJS_2, deren Seiten LS_2 und CS_2 sich verhalten wie 1 : 2 (weil $LS_2 = \frac{1}{3} LC$), folgt:

$$CJ = 2LH$$

oder:

$$b_1 + y = 2\left(\frac{b - b_1}{2} + x\right)$$

Fig. 35.



Nun ist aber wegen Kongruenz der Dreiecke AHS_1 und CJS_1:

$$b + x = b_1 + y$$

folglich wird:

$$b + x = 2\left(\frac{b - b_1}{2} + x\right)$$

Daraus ergibt sich:

$$x = b_1 \quad \text{und} \quad y = b$$

Bei verhältnismäßig hohen und schmalen Trapezen fällt der Schnitt der Mittellinie mit der Geraden HJ (Fig. 34) ziemlich schlank aus, was für die genaue Fixierung des Schwerpunktes nicht gerade vorteilhaft ist. Günstiger ist in der Beziehung dann die Konstruktion Fig. 36, bei welcher sich die Geraden HJ und $H_1 J_1$ unter stumpferem Winkel schneiden. Die Mittellinie braucht hier natürlich nicht gezogen zu werden.

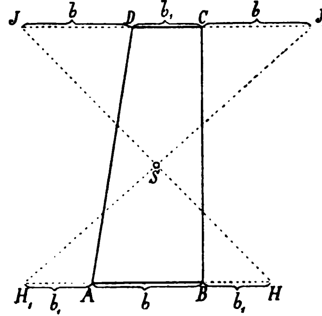
Andere einfache von Prof. Rob. Land in Konstantinopel*) angegebene Lösungen für die Schwerpunktsbestimmung eines Trapezes, die noch den

*) Centralbl. d. Bauverw. 1894, S. 192 und 458.

Vorteil haben, daß sie nicht so viel seitlichen Raum beanspruchen, als die Konstruktionen Fig. 34 und 36, sind folgende:

1. Man ziehe (Fig. 37) die Diagonale AC und durch D die DG || AC, verlängere die Mittellinie EF bis G und mache $ES = \frac{1}{3} EG$. Es ist dann S der gesuchte Schwerpunkt.

Fig. 36.



Beweis. Sind S_1 und S_2 (Fig. 38) die Schwerpunkte der Dreiecke ABD und BCD, so ist:

$$S_1 S_2 \parallel AC$$

also auch:

$$S_1 S \parallel AC \parallel DG$$

Da nun:

$$ES_1 = \frac{1}{3} ED$$

so folgt:

$$ES = \frac{1}{3} EG$$

2. Da, wie unter 1. gezeigt wurde, $S_1 S_2 \parallel AC$ ist, so schneidet die nach

Fig. 37.

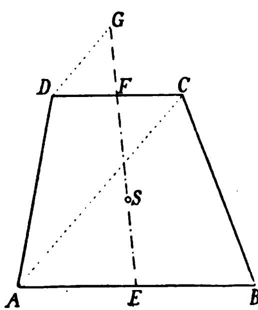
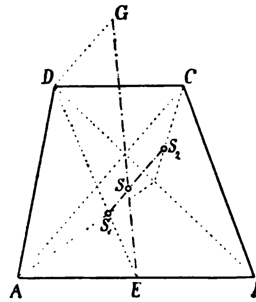


Fig. 38.



beiden Seiten hin verlängerte $S_1 S_2$ auf den parallelen Trapezseiten (Fig. 39) von A bezw. C aus die gleichen Strecken

$$x = AH = CJ$$

ab, und da:

$$S_1 D = 2 S_1 E$$

so folgt:

$$DJ = 2EH$$

oder:

$$b_1 + x = 2\left(\frac{b}{2} - x\right) = b - 2x$$

woraus sich ergibt:

$$x = \frac{1}{3}(b - b_1)$$

Die im Abstande x von der Ecke A zu der Diagonalen AC gezogene Parallele geht hiernach durch den Schwerpunkt. Da sich dasselbe für die andere Diagonale BD ebenfalls nachweisen läßt, so erhält man den Satz:

Die im Abstande $x = \frac{1}{3}(b - b_1)$ von den Ecken der größeren Grundlinie zu den Diagonalen gezogenen Parallelen schneiden sich im Schwerpunkt S.

Zur Konstruktion Fig. 40 ziehe man $CK \parallel AD$, mache $AH = BL = \frac{1}{3}BK$ und ziehe durch H und L Parallelen zu den Diagonalen AC bezw. BD.

Fig. 39.

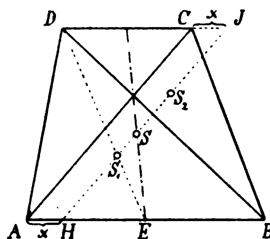
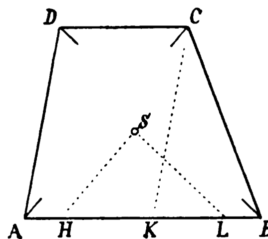


Fig. 40.



Der Schnittpunkt derselben ist der Schwerpunkt des Trapezes. Die Diagonalen brauchen dabei nicht selbst gezogen zu werden; es genügt, deren Richtung durch Anlegen des Winkels festzulegen.

Unregelmäßiges Viereck.

Man zerlege das Viereck ABCD (Fig. 41) durch die Diagonale BD in die beiden Dreiecke ABD und BCD und bestimme deren Schwerpunkte S_1

Fig. 41.

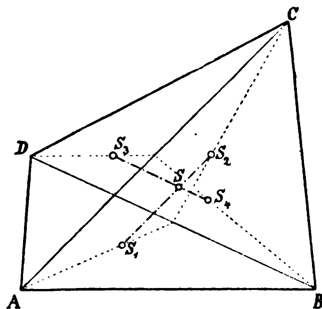
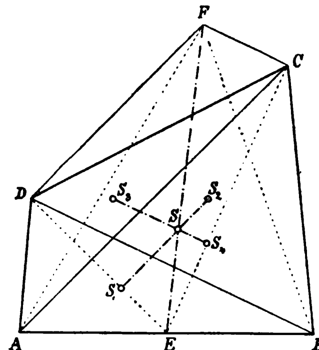


Fig. 42.



und S_2 durch Drittelung der Mittellinien. Die Verbindungslinie $S_1 S_2$ ist dann eine Schwerlinie des Vierecks. Eine zweite Schwerlinie erhält man, wenn man ein anderes Mal das Viereck durch die Diagonale AC in die Dreiecke ACD und ABC zerlegt und deren Schwerpunkte S_3 und S_4 miteinander verbindet. Der Schnittpunkt der beiden Schwerlinien $S_1 S_2$ und $S_3 S_4$ gibt dann den Gesamtschwerpunkt des Vierecks.

Zieht man (Fig. 42):

$$DF \parallel AC \text{ und } CF \parallel BD$$

so wird wegen:

$$ES_1 = \frac{1}{3} ED \text{ und } ES_4 = \frac{1}{3} EC$$

und weil:

$$S_1 S_2 \parallel DF \text{ und } S_3 S_4 \parallel CF$$

die Gerade EF durch den Punkt S gehen und auch:

$$ES = \frac{1}{3} EF$$

sein müssen.

Der Punkt S ist daher gleichzeitig der Schwerpunkt des Dreiecks ABF.

Darauf beruht das folgende von Prof. R. Land angegebene*) Verfahren zur Bestimmung des Schwerpunktes S. Man teile (Fig. 43) die Seite AB in drei gleiche Teile, ziehe $CF \parallel BD$ und $DF \parallel AC$, ferner $GS \parallel AF$ und $HS \parallel BF$.

Die in Fig. 43 punktiert angedeuteten Linien brauchen selbstverständlich nicht wirklich gezogen, sondern nur markiert zu werden.

Fig. 43.

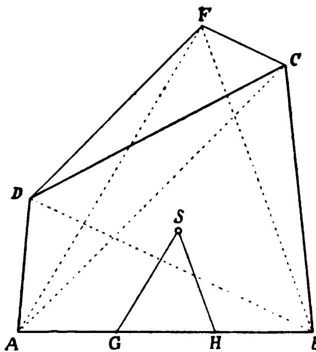
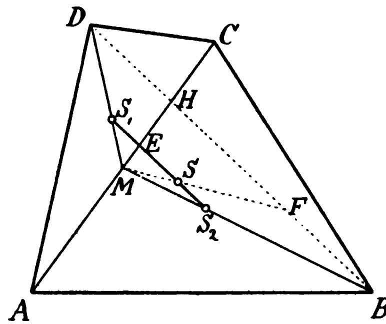


Fig. 44.



Ein anderes bisher vielfach benutztes Verfahren zur Schwerpunktsbestimmung ist folgendes:

Man zerlege das Viereck ABCD (Fig. 44) durch die Diagonale AC in die Dreiecke ABC und ACD und bestimme deren Schwerpunkte S_1 und S_2. Der Schnittpunkt der Verbindungslinie $S_1 S_2$ mit der Diagonalen AC sei E. Macht man dann $S_1 S = S_2 E$, so ist S der Schwerpunkt des Vierecks.

Der Beweis ergibt sich daraus, daß sich die Abschnitte $S_1 S$ und $S_2 S$ umgekehrt verhalten müssen, wie die zugehörigen Dreiecksflächen.

Es ist nun aber:

$$S_1 S : S_2 S = S_2 E : S_1 E$$

und wenn man die Hilfslinie BD (welche wegen $MS_1 = \frac{1}{3} MD$, und $MS_2 = \frac{1}{3} MB$ parallel $S_1 S_2$ ist) zieht und die MS bis F verlängert:

*) Zeitschrift des Hannoverschen Arch.- und Ing.-Vereins 1895, S. 451.

$$S_2E : S_1E = BH : DH$$

Da nun:

$$BH : DH = \triangle ABC : \triangle ACD$$

so ist:

$$S_1S : S_2S = \triangle ABC : \triangle ACD$$

Polygon.

Um den Schwerpunkt eines Polygons zu finden, zerlege man dieses in einzelne Dreiecke, in deren Schwerpunkten man die Flächeninhalte derselben als Gewichte wirkend denkt. Der Angriffspunkt der Resultierenden dieser Gewichte ist der gesuchte Schwerpunkt.

Sind z. B. $S_1 S_2 S_3$ die Schwerpunkte der Dreiecke ABC, ACD, ADE, in welche das Fünfeck ABCDE (Fig. 45) zerlegt ist, so ziehe man S_1S_2 und teile diese Linie in O so, daß sich verhält:

$$S_1O : S_2O = ACD : ABC$$

Fig. 45.

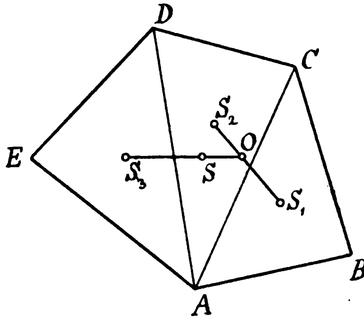
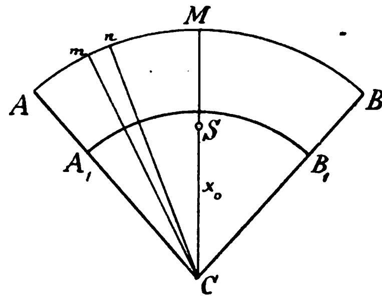


Fig. 46.



Man ziehe ferner OS_3 und teile diese Linie in S so, daß sich verhält:

$$OS : S_3S = ADE : (ABC + ACD)$$

Es ist dann S der gesuchte Schwerpunkt des Fünfecks.

Kreisausschnitt oder Sektor.

Der Schwerpunkt liegt in der Halbierungslinie des Winkels ACB (Fig. 46). Denkt man sich den Kreisausschnitt vom Halbmesser r durch Radien in sehr viele kleine Teile geteilt, so kann man diese Teile als Dreiecke betrachten, deren Schwerpunkte um $\frac{2}{3}$ r vom Kreismittelpunkte C entfernt sind. Der Schwerpunkt S des Kreisausschnittes fällt daher zusammen mit dem Schwerpunkte des mit dem Radius $\frac{2}{3}$ r beschriebenen Kreisbogens A_1B_1.

Da nun:

$$\widehat{A_1B_1} = \frac{2}{3}\,\widehat{AB} = \frac{2}{3}\,b$$

und:

$$\overline{A_1B_1} = \frac{2}{3}\,\overline{AB} = \frac{2}{3}\,s$$

ist, so wird nach Gl. 36) S. 39:

$$x_0 = \frac{\frac{2}{3} r \cdot \frac{2}{3} s}{\frac{2}{3} b} = \frac{2}{3} \frac{rs}{b} \quad \ldots \ldots \quad 39)$$

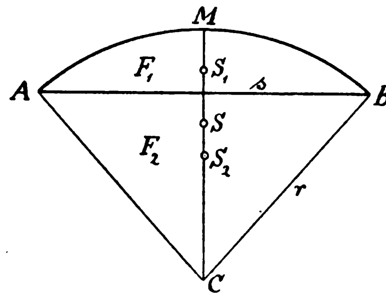
Für den Halbkreis ist $s = 2r$ und $b = r\pi$, folglich:

$$x_0 = \frac{4r}{3\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 40)$$

Kreisabschnitt oder Segment.

Zerlegt man (Fig. 47) den Kreisausschnitt $CAMB = F$ durch die Sehne $AB = s$ in das Segment $AMB = F_1$ und das Dreieck $ABC = F_2$,

Fig. 47.



so läßt sich der Schwerpunktsabstand für das Segment mit Hilfe der Gl. 34) S. 37 bestimmen.

Bedeuten $x_0 x_1 x_2$ die Abstände der resp. Schwerpunkte $S S_1 S_2$, vom Punkte C so ist:

$$F x_0 = F_1 x_1 + F_2 x_2$$

folglich:

$$x_1 = \frac{F x_0 - F_2 x_2}{F_1}$$

Durch Einsetzung der Werte:

$$F = \frac{rb}{2}; \qquad F_2 = \frac{s}{2}\sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

$$x_0 = \frac{2}{3} \frac{rs}{b}; \qquad x_2 = \frac{2}{3}\sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

worin b die Länge des Bogens AB bedeutet, findet man:

$$x_1 = \frac{s^3}{12 F_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 41)$$

Für den Halbkreis ist $s = 2r$ und $F_1 = \frac{r^2\pi}{2}$. Durch Einsetzung dieser Werte ergibt sich, übereinstimmend mit dem Ausdruck (Gl. 40):

$$x_1 = \frac{4r}{3\pi}$$

Kugelzone und Kugelschale oder Calotte.

Der Schwerpunkt liegt in der Mitte der Höhe.

Mantel der Pyramide und des Kegels.

Der Schwerpunkt liegt in der Verbindungslinie des Schwerpunktes der Grundfläche mit der Spitze und in $^1/_3$ der Höhe.

3. Schwerpunkte von Körpern.

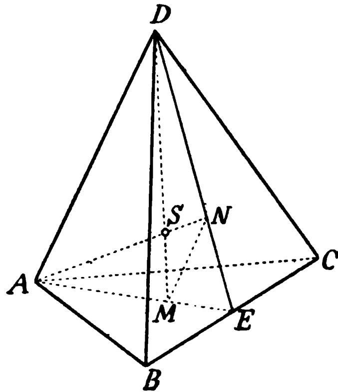
Prisma und Cylinder.

Der Schwerpunkt liegt in der Mitte der Verbindungslinie der Schwerpunkte der Endflächen.

Pyramide.

Denkt man sich die dreiseitige Pyramide (Fig. 48) durch Ebenen parallel der Grundfläche in sehr dünne Schichten zerlegt, so liegen deren Schwerpunkte sämtlich in der geraden Linie DM, welche den Schwerpunkt M der Grundfläche ABC mit der Spitze D verbindet, folglich muß in dieser Linie DM auch der Schwerpunkt S der ganzen Pyramide liegen. Betrachtet man ein anderes Mal BCD als Grundfläche und A als Spitze der Pyramide, so muß, wenn N der Schwerpunkt des Dreiecks BCD ist, der Schwerpunkt der Pyramide auch in der Linie AN liegen, er fällt daher mit dem Schnittpunkte S der in der Ebene ADE liegenden Geraden DM und AN zusammen.

Fig. 48.



Zieht man die Hilfslinie MN, so ist wegen:

$$EM = \frac{1}{3} AE$$

und:

$$EN = \frac{1}{3} DE$$

die Linie MN parallel zu AD, also $\triangle SNM \sim \triangle SAD$.

Daraus folgt:

$$MN = \frac{1}{3} AD$$

und:

$$MS = \frac{1}{3} SD = \frac{1}{4} MD$$

Die vielseitige Pyramide kann durch Ebenen, welche durch die Spitze gehen, in dreiseitige Pyramiden zerlegt werden, deren Schwerpunkte sämtlich in $^1/_4$ der Höhe, also in einer der Grundfläche parallelen Ebene liegen. In derselben Ebene liegt auch der Schwerpunkt der ganzen Pyramide, daher gilt allgemein:

Der Schwerpunkt einer Pyramide liegt in der Geraden, welche den Schwerpunkt der Grundfläche mit der gegenüberliegenden Spitze verbindet, und im ersten Viertel der Höhe.

Kegel.

Der Schwerpunkt liegt in der Geraden, welche den Mittelpunkt des Grundkreises mit der Spitze verbindet, und in $^1/_4$ der Höhe.

Kugelausschnitt (Kugelsektor).

Indem man den Kugelausschnitt betrachtet als zusammengesetzt aus sehr vielen kleinen Pyramiden, deren Spitzen sämtlich im Mittelpunkte und deren Grundflächen in der Oberfläche der Kugel liegen, kann man den Schwerpunkt in ähnlicher Weise bestimmen, wie dies bei dem Kreisausschnitt durchgeführt wurde.

Man erhält für den Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkt der Kugel den Wert:

$$x_0 = \frac{3}{8}\left(2r - h\right) \quad \ldots \ldots \quad 42)$$

worin r den Radius der Kugel, h die Höhe des Kugelsegments bedeutet.

Kugelabschnitt (Kugelsegment).

Der Schwerpunktsabstand x_0 vom Mittelpunkt der Kugel wird in derselben Weise bestimmt, wie der Schwerpunktsabstand des Kreisabschnittes, indem man den Kugelabschnitt als Differenz von Kugelsektor und Kegel auffaßt.

Ist wieder r = Kugelradius, h = Höhe des Segmentes, so findet man:

$$x_0 = \frac{3}{4}\,\frac{(2r - h)^2}{3r - h} \quad \ldots \ldots \quad 43)$$

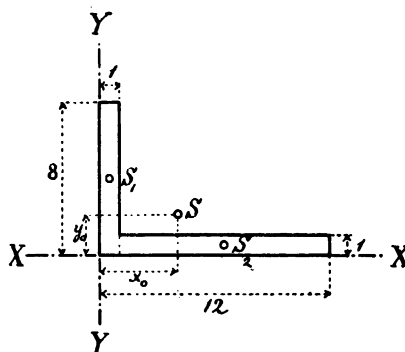
für die Halbkugel ist:

$$h = r$$

folglich:

$$x_0 = \frac{3}{8}\,r \quad \ldots \quad 44)$$

Fig. 49.



Aufgabe 43. Es soll der Schwerpunkt des ungleichschenkligen Winkeleisens Fig. 49 bestimmt werden.

Auflösung. Man denke sich das Winkeleisen aus 2 Rechtecken

$$F_1 = 8 \,.\, 1 = 8 \text{ qcm}$$

und

$$F_2 = (12 - 1) \,.\, 1 = 11 \text{ qcm}$$

bestehend und wende den Satz an: Das statische Moment des Ganzen ist gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Teile (Gl. 34, S. 37).

Werden die Abstände der Schwerpunkte S_1 und S_2 von der Achse XX mit y_1 und y_2, von der Achse YY mit x_1 und x_2 bezeichnet, so ist in Bezug auf die Achse XX:

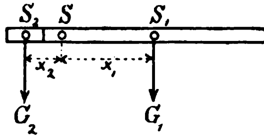
$$(F_1 + F_2)\, y_0 = F_1 y_1 + F_2 y_2$$
$$(8 + 11)\, y_0 = 8 \,.\, 4 + 11 \,.\, 0{,}5$$
$$y_0 = 1{,}97$$

In Bezug auf die Achse Y Y ist:

$$(F_1 + F_2)\, x_0 = F_1 x_1 + F_2 x_2$$
$$(8 + 11)\, x_0 = 8 \,.\, 0{,}5 + 11 \,.\, 6{,}5$$
$$x_0 = 3{,}97$$

Aufgabe 44. Ein 1,2 m langer cylindrischer Holzstab ist mit einem gleich dicken cylindrischen Eisenstabe von 0,2 m Länge geradlinig verbunden. Das Gewicht des Holzstabes ist $G_1 = 1{,}4$ kg, das Gewicht des Eisenstabes: $G_2 = 3{,}1$ kg. Wo liegt der Schwerpunkt des Ganzen?

Fig. 50.



Auflösung. In Bezug auf die Schwerachse muß das statische Moment des Holzteiles gleich dem statischen Momente des Eisenteiles sein. Nach Fig. 50 ist daher:

$$G_1 x_1 = G_2 x_2$$

Da nun $x_1 + x_2 =$ dem Abstande der beiden in der Mitte des Holz- bezw. Eisenteiles liegenden Schwerpunkte S_1 und S_2 ist, also:

$$x_1 + x_2 = \frac{1{,}2 + 0{,}2}{2} = 0{,}7$$

oder:

$$x_2 = 0{,}7 - x_1$$

so folgt:

$$G_1 x_1 = G_2 (0{,}7 - x_1)$$

Durch Auflösung für x_1 erhält man hieraus:

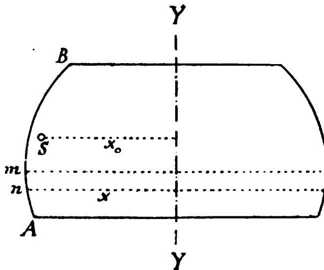
$$x_1 = \frac{0{,}7 \,.\, G_2}{G_1 + G_2} = \frac{0{,}7 \,.\, 3{,}1}{1{,}4 + 3{,}1} = 0{,}48 \text{ m}$$

§ 11.

Rotationsflächen und Rotationskörper (Guldinsche Regel).

Dreht sich eine ebene Kurve A B (Fig. 51) um eine in ihrer Ebene liegende Achse Y, so wird dadurch eine Umdrehungsfläche (Rotationsfläche) erzeugt.

Fig. 51.



Man denke sich die Kurve in sehr viele kleine Teile zerlegt. Ein Teilchen m n, dessen Entfernung von der Y-Achse x sein möge, erzeugt dann bei einer Umdrehung die Fläche:

$$f = mn \,.\, 2x\pi$$

Der Inhalt der von der ganzen Kurve erzeugten Fläche ist daher:

$$F = \Sigma (mn \,.\, 2x\pi) = 2\pi \Sigma (mn \,.\, x)$$

und da, wenn x_0 den Abstand des Schwerpunktes der Kurve von der Y-Achse bedeutet, nach 1. § 10:

$$\Sigma (m n \,.\, x) = \widehat{AB} \,.\, x_0$$

gesetzt werden kann, so wird:

$$\mathbf{F} = \widehat{\mathbf{AB}} \,.\, 2 \mathbf{x}_0 \pi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 45)$$

In Worten: **Der Inhalt einer Fläche, welche durch Umdrehung einer ebenen Kurve um eine in ihrer Ebene liegende Achse erzeugt wird, ist gleich dem Produkte aus der Länge der Kurve und dem Wege ihres Schwerpunktes.**

Dreht sich eine ebene Fläche F (Fig. 52) um eine in ihrer Ebene liegende Achse Y, so entsteht dadurch ein Umdrehungskörper (Rotationskörper).

Fig. 52.

Man denke sich die ganze Fläche F aus sehr vielen kleinen Einzelflächenteilen zusammengesetzt. Ein Flächenteilchen f in der Entfernung x von der Y-Achse erzeugt bei einer Umdrehung einen ringförmigen Körper von dem Volumen:

$$v = f \,.\, 2 x \pi$$

Das Volumen des von der ganzen Fläche erzeugten Körpers ist daher:

$$V = \Sigma (f \,.\, 2 x \pi) = 2 \pi \Sigma (f x)$$

und wenn nach Gl. 34) S. 37:

$$\Sigma (f x) = F x_0$$

gesetzt wird, wobei x_0 den Schwerpunktsabstand der Fläche F von der Y-Achse bedeutet, so erhält man:

$$\mathbf{V} = \mathbf{F} \,.\, 2 \mathbf{x}_0 \pi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 46)$$

In Worten: **Der Inhalt eines Körpers, welcher durch Umdrehung einer ebenen Fläche um eine in ihrer Ebene liegende Achse erzeugt wird, ist gleich dem Produkte aus dem Inhalt der Fläche und dem Wege ihres Schwerpunktes.**

Als Beispiel mögen folgende Fälle dienen:

Ein Halbkreisbogen vom Radius r, dessen Durchmesser parallel der Y-Achse ist und die Entfernung a von derselben hat (Fig. 53), erzeugt nach Gl. 45) bei einer Umdrehung die Fläche:

$$F = r \pi \,.\, 2 x_0 \pi$$

und da hier nach Gl. 37) S. 39:

$$x_0 = a + \frac{2r}{\pi}$$

einzusetzen ist, so entsteht:

$$F = r\pi 2\left(a + \frac{2r}{\pi}\right)\pi = 2ar\pi^2 + 4r^2\pi$$

Für $a = 0$ ergibt sich als Oberfläche einer Kugel:

$$F = 4r^2\pi$$

Fig. 53.

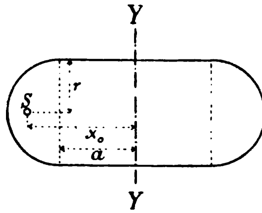
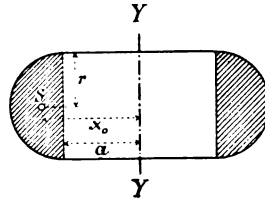


Fig. 54.



Dreht sich, statt eines Halbkreisbogens, die volle Halbkreisfläche um die Y-Achse (Fig. 54), so entsteht nach Gl. 46) ein Körper von dem Volumen:

$$V = \frac{r^2\pi}{2} 2x_0\pi$$

und indem man darin nach Gl. 40) S. 47:

$$x_0 = a + \frac{4r}{3\pi}$$

einsetzt:

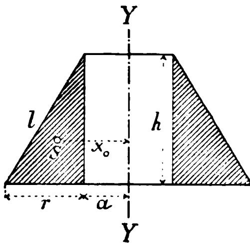
$$V = \frac{r^2\pi}{2} 2\left(a + \frac{4r}{3\pi}\right)\pi = ar^2\pi^2 + \frac{4}{3}r^3\pi$$

Daraus folgt für $a = 0$ der Kugelinhalt:

$$V = \frac{4}{3}r^3\pi$$

Das rechtwinklige Dreieck Fig. 55 von der Basis r und der Höhe h beschreibt bei einer Drehung um die Y-Achse einen Raum, der sich ergibt aus Gl. 46), wenn darin eingesetzt wird:

Fig. 55.



$$F = \frac{rh}{2} \text{ und } x_0 = a + \frac{r}{3}$$

Man erhält:

$$V = \frac{rh}{2} 2\left(a + \frac{r}{3}\right)\pi = ahr\pi + r^2\pi\frac{h}{3}$$

und als Inhalt des Kegels (für $a = 0$):

$$V = r^2\pi\frac{h}{3}$$

Durch Drehung der Dreiecksseite l entsteht die Mantelfläche eines abgestumpften Kegels. Der Flächeninhalt desselben ergibt sich unter Einsetzung von:

$$x_0 = a + \frac{r}{2}.$$

nach Gl. 45) zu:

$$F = 2l\left(a + \frac{r}{2}\right)\pi = 2al\pi + r\pi l$$

Die Mantelfläche des spitzen Kegels (a = 0) ist danach:

$$F = r\pi l$$

§ 12.

Widerstände fester Stützpunkte.

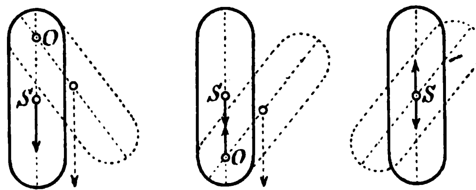
1. Ein Stützpunkt.

Wirkt auf einen Körper, welcher in einem einzigen Punkte O unterstützt ist, nur das im Schwerpunkte S desselben angreifende Eigengewicht, so befindet sich der Körper im Gleichgewichte, wenn die Punkte O und S in einer Vertikalen liegen.

Wird der Körper aus seiner Gleichgewichtslage herausgebracht, so entsteht, da die Schwerpunktsvertikale nun nicht mehr durch den Stützpunkt O hindurchgeht, ein statisches Moment, welches dem wieder losgelassenen Körper eine Drehung um den Punkt O erteilt. Je nachdem bei dieser Drehung das statische Moment des Eigengewichtes bestrebt ist, die frühere Gleichgewichtslage wiederherzustellen oder nicht, nennt man den anfänglichen Gleichgewichtszustand des Körpers entweder stabil oder labil.

Bei dem stabilen Gleichgewichtszustande liegt der Schwerpunkt S vertikal unter dem Befestigungspunkte (Fig. 56), bei dem labilen Gleichgewichtszustande vertikal über dem Befestigungspunkte (Fig. 57).

Fig. 56. Fig. 57. Fig. 58.



Indifferent heißt der anfängliche Gleichgewichtszustand, wenn der Körper nach jeder Lagenänderung in Ruhe bleibt; dies ist der Fall, wenn der Schwerpunkt mit dem Befestigungspunkte zusammenfällt (Fig. 58).

Bei einem Körper, welcher sich mit kugelförmiger Fläche auf eine horizontale Ebene stützt, liegt der Schwerpunkt immer über dem Stützpunkte. Ein solcher Körper wird, da der normale Gegendruck der Unterstützungsebene stets durch den Krümmungsmittelpunkt der Kugelfläche geht, sich im stabilen, labilen

oder indifferenten Gleichgewichtszustande befinden, je nachdem der Schwerpunkt unter oder über dem Krümmungsmittelpunkt der Kugelfläche liegt, oder mit diesem zusammenfällt.

Eine homogene Halbkugel ist auf horizontaler Ebene immer im stabilen Gleichgewichte (Fig. 59).

Fig. 59.

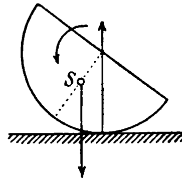
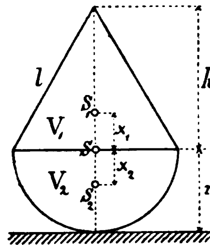


Fig. 60.



Für einen aus Halbkugel und Kegel zusammengesetzten homogenen Körper ist die Bedingung des indifferenten Gleichgewichtes (Fig. 60):

$$V_1 x_1 = V_2 x_2$$

oder:

$$r^2 \pi \frac{h}{3} \cdot \frac{h}{4} = \frac{2}{3} r^3 \pi \cdot \frac{3}{8} r$$

Daraus folgt:

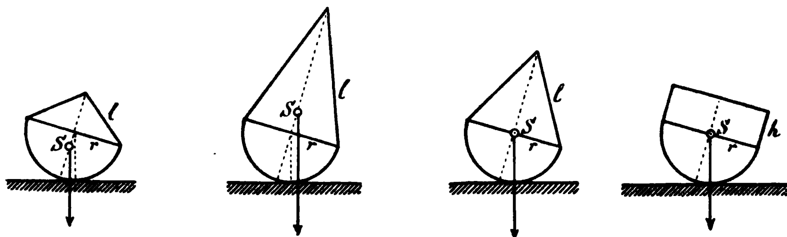
$$h^2 = 3 r^2$$

Die Seite des Kegels wird danach:

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{3 r^2 + r^2} = 2 r$$

Für $l < 2r$ ist der Gleichgewichtszustand stabil (Fig. 61).
" $l > 2r$ " " " labil (Fig. 62).
" $l = 2r$ " " " indifferent (Fig. 63).

Fig. 61. Fig. 62. Fig. 63. Fig. 64.



In ähnlicher Weise findet man, daß ein aus Halbkugel und Cylinder zusammengesetzter homogener Körper (Fig. 64) sich im indifferenten Gleichgewichte befindet, wenn der cylindrische Teil die Höhe hat:

$$h = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

2. Zwei Stützpunkte.

Wenn ein Körper in zwei Punkten A und B unterstützt wird, so ist im allgemeinen die Druckverteilung auf die Stützpunkte unbestimmt. Die Be-

Fig. 65.

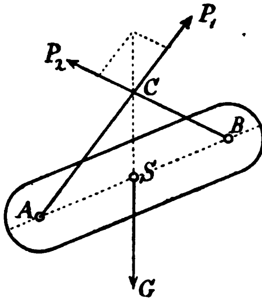
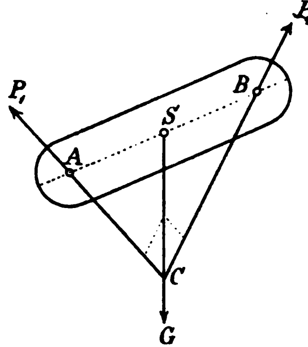
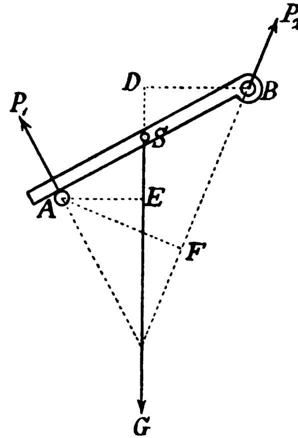


Fig. 66.



dingung des Gleichgewichtes ist, daß die Resultierende aus den Gegendrücken P_1 und P_2 mit dem Gewichte G des Körpers gleiche Größe und entgegengesetzte Richtung hat. Diese Bedingung kann aber, da die Höhenlage des Punktes C, in welchem sich die drei Kräfte $P_1 P_2 G$ schneiden, nicht gegeben ist, auf unendlich viele verschiedene Arten erfüllt werden, wie beispielsweise die Fig. 65 und 66 erkennen lassen.

Fig. 67.



Die Unbestimmtheit schwindet, sobald die Richtung eines der Stützendrücke P_1 und P_2 bekannt ist, weil dadurch der Punkt C, in welchem sich die Kräfte $P_1 P_2 G$ schneiden, und damit zugleich auch die Richtung des anderen Stützendruckes festliegt.

Ruht z. B. der Körper AB (Fig. 67) frei auf der Stütze A, so muß der daselbst wirkende Gegendruck P_1 senkrecht zu AB gerichtet sein, und man erhält zur Bestimmung der Größe dieses Gegendruckes die Gleichung (Drehpunkt B):

$$P_1 \,.\, \overline{AB} - G \,.\, \overline{BD} = 0$$

oder:

$$P_1 = G \,.\, \frac{BD}{AB}$$

Der Gegendruck P_2 ergibt sich aus der Gleichung der statischen Momente in Bezug auf den Drehpunkt A

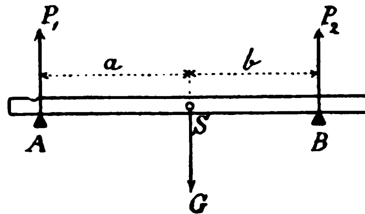
$$G \,.\, \overline{AE} - P_2 \,.\, \overline{AF} = 0$$

oder:

$$P_2 = G \,.\, \frac{AE}{AF}$$

Liegt der Körper AB auf beiden Stützen horizontal frei auf (Fig. 68), so sind beide Gegendrücke vertikal gerichtet, sämtliche Kräfte laufen also

Fig. 68.

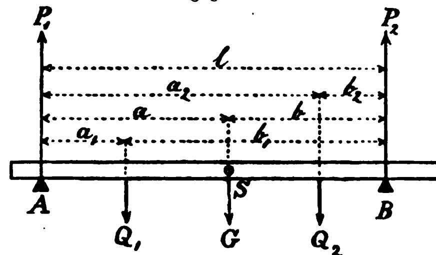


parallel. Ist l die Länge zwischen den Stützpunkten A und B, so erhält man zur Bestimmung der Gegendrücke nach den Bezeichnungen der Fig. 68, indem man das eine Mal in Bezug auf den Drehpunkt B, das andere Mal in Bezug auf den Drehpunkt A die Gleichung der statischen Momente aufstellt:

$$P_1 l - G b = 0 \quad \text{oder} \quad \mathbf{P_1 = G \frac{b}{l}} \quad \ldots\ldots \quad 47)$$

$$G a - P_2 l = 0 \quad \text{oder} \quad \mathbf{P_2 = G \frac{a}{l}} \quad \ldots\ldots \quad 48)$$

Fig. 69.



Hat der in den Punkten A und B unterstützte Körper außerdem noch die Gewichte Q_1 und Q_2 zu tragen (Fig. 69), so wird man in gleicher Weise erhalten:

$$P_1 l - Q_1 b_1 - G b - Q_2 b_2 = 0$$

oder:

$$\mathbf{P_1 = Q_1 \frac{b_1}{l} + G \frac{b}{l} + Q_2 \frac{b_2}{l}} \quad \ldots\ldots \quad 49)$$

und:

$$Q_1 a_1 + G a + Q_2 a_2 - P_2 l = 0$$

oder:

$$P_2 = Q_1 \frac{a_1}{l} + G \frac{a}{l} + Q_2 \frac{a_2}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 50)$$

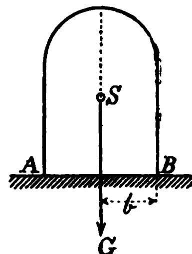
Der gleichartige Bau der Glieder auf der rechten Seite der Gleichungen 49) und 50) läßt erkennen, daß der Beitrag, den jedes einzelne Gewicht zu den Stützendrücken liefert, genau in derselben Weise zu bestimmen ist, als wenn dieses Gewicht die einzige auf den Körper AB wirkende Belastung wäre.

3. Die Standfestigkeit oder Stabilität der Körper.

Ein auf horizontaler Unterlage an drei Stellen unterstützter Körper ist stabil, wenn die durch den Schwerpunkt gelegte Vertikale innerhalb des Dreiecks fällt, welches durch geradlinige Verbindung der Stützpunkte gebildet wird. (Beispiel: dreibeiniger Tisch.)

Fällt der Schwerpunkt auf eine Dreiecksseite, so ist das Gleichgewicht ein labiles, läge er außerhalb des Dreiecks, so würde der Körper um eine der Dreiecksseiten gedreht werden und umkippen. Die betreffende Dreiecksseite bildet dann die **Kippkante**.

Fig. 70.



Bei einem auf horizontaler Unterlage an mehr als drei Stellen unterstützten Körper ist die Druckverteilung auf die Stützpunkte eine unbestimmte, die Stabilität des Körpers ist aber gesichert, wenn die Schwerpunktsvertikale innerhalb der Kippkanten fällt, d. h. innerhalb derjenigen Geraden, welche durch die äußersten Stützpunkte gelegt werden können.

Ruht der Körper mit ebener Grundfläche auf der horizontalen Unterstützungsebene, so ist derselbe anzusehen als ein Körper mit unendlich vielen Stützpunkten.

Das statische Moment des Körpergewichtes in Bezug auf eine Kippkante nennt man das **Stabilitätsmoment** des Körpers. Dasselbe ist um so größer, die Stabilität des Körpers also um so gesicherter, je größer der kleinste Abstand der Schwerpunktsvertikalen von den Kippkanten ist.

Wird das Stabilitätsmoment mit M bezeichnet, so ist nach Fig. 70 in Bezug auf die senkrecht zur Bildebene stehende Kante B:

$$M = G b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 51)$$

Wirkt auf den Körper (Fig. 71) außer dem Gewichte G noch eine Kraft P, so wird die Stabilität des Körpers so lange gesichert sein, solange das Moment der Kraft P kleiner ist, als das Stabilitätsmoment des Körpers in Bezug auf eine bestimmte Kippkante, solange also die Mittelkraft R aus G und P noch innerhalb der Kippkante bleibt. Erreicht die Kraft P aber

eine solche Größe, daß die Resultierende R durch die Kippkante hindurchgeht, so beginnt der Körper, sich um diese Kante zu drehen. Dies ist der Fall, wenn:

$$Pa = Gb$$

oder:

$$\mathbf{P = G \cdot \frac{b}{a}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 52)$$

ist. Der Schwerpunkt S wird dabei allmählich gehoben, bis er seine höchste

Fig. 71.

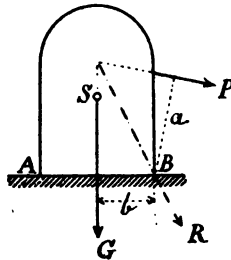
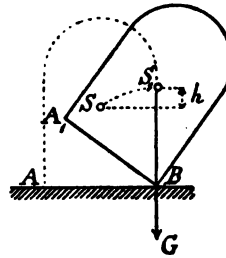
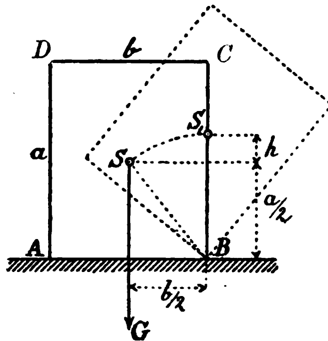


Fig. 72.



Stelle senkrecht über der Kippkante erreicht hat, in welchem Augenblicke sich der Körper im labilen Gleichgewichte befindet (Fig. 72). Es ist dann keine weitere Kraft erforderlich, um den Körper vollends umzustürzen.

Fig. 73.



Die mechanische Arbeit $\mathfrak{A}$, welche die Kraft P verrichten muß, um den Körper aus der Ruhelage (Fig. 71) in die labile Gleichgewichtslage (Fig. 72) zu bringen, nennt man die **dynamische Stabilität**.

Ist h die Höhe, um welche der Schwerpunkt S ansteigt, während der Körper aus der Lage Fig. 71 in die Lage Fig. 72 gelangt, so ist:

$$\mathfrak{A} = \mathbf{Gh} \quad \ldots \quad 53)$$

Aufgabe 45. Ein parallelepipedischer Granitblock ABCD (Fig. 73) hat $a = 1$ m Höhe, $b = 0{,}8$ m Breite und $l = 2$ m Tiefe. Wie groß ist dessen Stabilitätsmoment, wie groß die mechanische Arbeit, um den Block umzukanten, wenn das Gewicht eines cbm : $\gamma = 2400$ kg ist?

Auflösung. Das Gewicht des ganzen Granitblockes beträgt:

$$G = \gamma \cdot abl = 2400 \cdot 1 \cdot 0{,}8 \cdot 2 = 3840 \text{ kg}$$

Das Stabilitätsmoment in Bezug auf eine der Kanten A oder B ist daher

$$M = G \cdot \frac{b}{2} = 3840 \cdot \frac{0{,}8}{2} = 1536 \text{ mkg}$$

Das Maß, um welches beim Umkanten der Schwerpunkt gehoben werden muß, beträgt:

$$h = BS_1 - \frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{0,8}{2}\right)^2} - \frac{1}{2} = 0,14 \text{ m}$$

folglich ist nach Gl. 53)

$$\mathfrak{A} = 3840 \,.\, 0,14 = 537,6 \text{ mkg}$$

§ 13.

Gleichgewicht zweier sich gegenseitig stützender belasteter Stäbe.

Es seien AC und BC (Fig. 74) zwei in einer Vertikalebene liegende Stäbe, welche in A und B fest gelagert sind, in C sich aneinander anlehnen und in E_1 und E_2 durch die Gewichte G_1 und G_2 belastet sind. Die Punkte

Fig. 74.

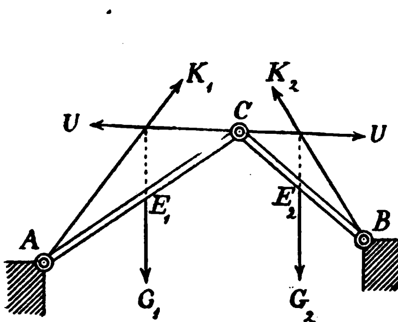
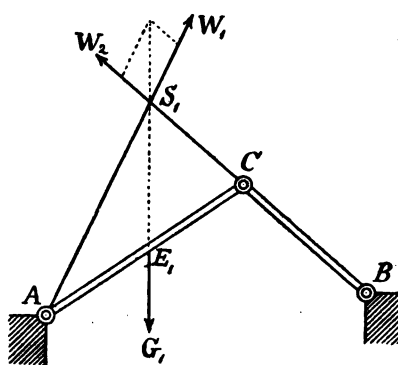


Fig. 75.



A, B, C sollen als Gelenkpunkte vorausgesetzt werden, die eine Drehung der Stäbe AC und BC in der vertikalen Kraftebene gestatten.

Zur Bestimmung der in A und B wirkenden Gegendrücke K_1 und K_2 denke man sich zunächst nur das Gewicht G_1 auf den Stab AC wirkend, den Stab BC dagegen unbelastet und gewichtlos (Fig. 75). Das Gewicht G_1 erzeugt in C einen Gegendruck W_2, welcher mit der Richtung des unbelasteten Stabes BC zusammenfallen muß, da dieser sonst um seinen Endpunkt B gedreht werden würde. Ist S_1 der Schnittpunkt von G_1 und W_2, so ergibt sich die Richtung des in A wirkenden Gegendruckes W_1 aus der Bedingung, daß die drei Kräfte $G_1 W_1 W_2$ sich in dem Punkte S_1 schneiden müssen; W_1 hat daher die Richtung AS_1. Die Größen von W_1 und W_2 erhält man aus dem in Fig. 75 angedeuteten Kräfteparallelogramm, dessen Diagonale gleich G_1 ist.

Denkt man sich ein anderes Mal nur den Stab BC durch das Gewicht G_2 belastet, den Stab AC dagegen unbelastet und gewichtlos (Fig. 76), so erhält man in derselben Weise die durch das Gewicht G_1 allein erzeugten Gegendrücke D_1 und D_2, von denen D_1 mit der Richtung des jetzt unbelasteten Stabes AC zusammenfällt.

Durch gleichzeitige Wirkung der Gewichte G_1 und G_2 entstehen in A und B Gegendrücke, welche sich zusammensetzen aus den durch die Gewichte G_1 bezw. G_2 einzeln hervorgerufenen Gegendrücken. Danach ist K_1 die Resultierende von W_1 und D_1, ebenso K_2 die Resultierende von W_2 und D_2 (Fig. 77).

Wird der Schnittpunkt von K_1 und G_1 mit s_1, der Schnittpunkt von K_2 und G_2 mit s_2 bezeichnet, so gibt die durch den Punkt C verlaufende Gerade $s_1 s_2$ die Richtung des Gegendruckes U an, den die beiden Stäbe in C

Fig. 76.

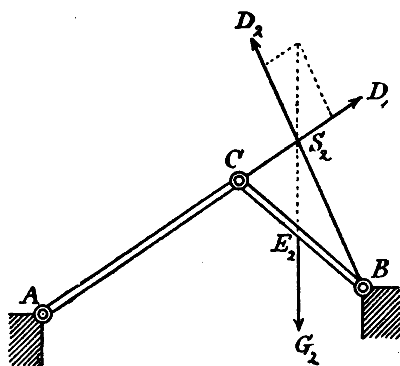
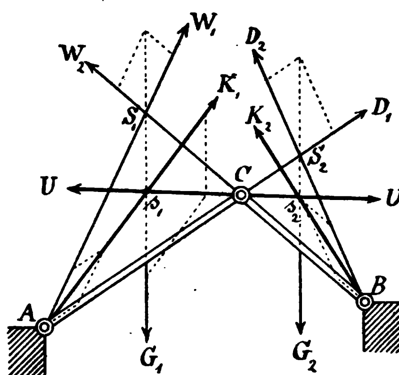


Fig. 77.



gegenseitig aufeinander ausüben. Der Größe nach ist U gleich der Diagonale des aus den Kräften K_1 und G_1 bezw. K_2 und G_2 konstruierten Parallelogramms.

Wenn die Stangen durch mehrere Gewichte belastet sind, so erfolgt die Bestimmung der Gegendrücke genau in derselben Weise. Man hat in diesem Falle dann nur unter G_1 die Resultierende sämtlicher auf die Stange AC wirkenden Gewichte, unter G_2 die Resultierende sämtlicher auf die Stange BC wirkenden Gewichte zu verstehen. Dabei ist das eigene Gewicht einer Stange genau ebenso zu behandeln, wie eine im Schwerpunkte der (gewichtslos gedachten) Stange angehängte fremde Last von gleicher Größe.

Um den Gegendruck U auf rein rechnerischem Wege zu bestimmen, denke man sich denselben nach horizontaler und vertikaler Richtung in die Komponenten H und V zerlegt und stelle sodann für jeden der beiden Stäbe die Gleichung der statischen Momente auf, indem man dabei jedesmal den festen Stützpunkt des Stabes als Drehpunkt wählt.

Nach den Bezeichnungen der Figuren 78 und 79 erhält man dann die Gleichungen:

$$G_1 a_1 - H h_1 - V b_1 = 0$$
$$- G_2 a_2 + H h_2 - V b_2 = 0$$

woraus sich für H und V die Werte ergeben:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{G}_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 + \mathbf{G}_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \mathbf{h}_2 + \mathbf{b}_2 \mathbf{h}_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 54)$$

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{G}_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{h}_2 - \mathbf{G}_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{h}_1}{\mathbf{b}_1 \mathbf{h}_2 + \mathbf{b}_2 \mathbf{h}_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 55)$$

Für die Seitenkräfte X_1 und Y_1 des Gegendruckes A erhält man sodann, indem man für den Stab AC einmal die algebraische Summe der Horizontal-

Fig. 78.

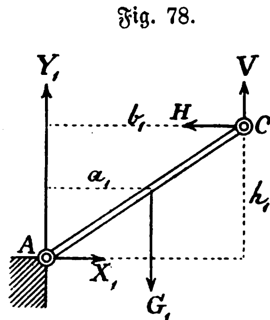
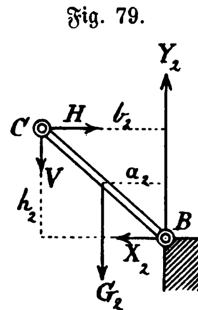


Fig. 79.



kräfte, das andere Mal die Summe der Vertikalkräfte gleich Null setzt, die Werte:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \mathbf{H} \\ \mathbf{Y}_1 &= \mathbf{G}_1 - \mathbf{V} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 56)$$

In derselben Weise erhält man für die Seitenkräfte des in B wirkenden Gegendruckes K_2:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X}_2 &= \mathbf{H} \\ \mathbf{Y}_2 &= \mathbf{G}_2 + \mathbf{V} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 57)$$

Ist γ der Winkel, welchen der Gegendruck U, und sind α_1 und α_2 die Winkel, welche die Gegendrücke K_1 und K_2 mit der Horizontalen einschließen, so ergeben sich die Richtungen der Kräfte U, K_1, K_2 aus:

$$\mathbf{tg}\,\gamma = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{H}}; \quad \mathbf{tg}\,\alpha_1 = \frac{\mathbf{Y}_1}{\mathbf{X}_1}; \quad \mathbf{tg}\,\alpha_2 = \frac{\mathbf{Y}_2}{\mathbf{X}_2} \quad \ldots \quad 58)$$

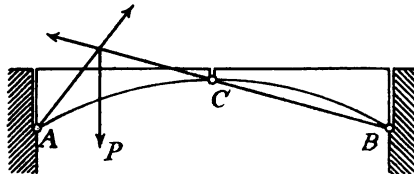
Die Größe dieser Kräfte kann man bestimmen aus den Gleichungen:

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{H}^2 + \mathbf{V}^2}; \quad \mathbf{K}_1 = \sqrt{\mathbf{X}_1^2 + \mathbf{Y}_1^2}; \quad \mathbf{K}_2 = \sqrt{\mathbf{X}_2^2 + \mathbf{Y}_2^2} \quad 59)$$

Die beiden sich gegenseitig stützenden Stäbe wurden bei der obigen Durchführung der Einfachheit wegen als gerade Stäbe angenommen, jedoch ist dies durchaus nicht erforderlich und gilt alles in diesem Paragraphen Ge-

sagte auch für krummlinige Stäbe. Ueberhaupt ist es für die Art und Weise der Bestimmung der Gegendrücke von keinem Einfluß, welche Gestalt die beiden sich stützenden Körper haben. So z. B. können nach der oben gezeigten Methode auch die Gegendrücke bei einer Bogenbrücke mit drei Gelenken ermittelt

Fig. 80.



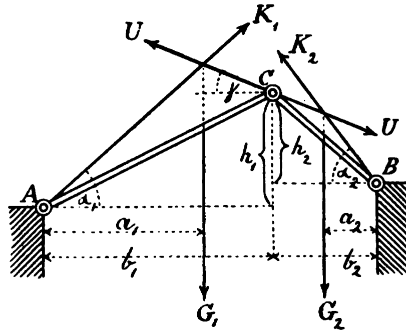
oder auch die Beiträge bestimmt werden, die eine einzelne Belastung P zu den Gegendrücken liefert (Fig. 80).

In ähnlicher Weise werden auch bei der statischen Untersuchung der einseitig belasteten Gewölbe die Kämpferdrücke gefunden*).

Aufgabe 46. Bei der in Fig. 81 dargestellten Stangenverbindung sei

$G_1 = 500$ kg $G_2 = 400$ kg
$a_1 = 1{,}4$ m $a_2 = 0{,}4$ m
$b_1 = 2{,}0$ m $b_2 = 0{,}9$ m
$h_1 = 1{,}0$ m $h_2 = 0{,}8$ m

Fig. 81.



Es sollen die durch die Gewichte G_1 und G_2 in den Punkten A, B, C hervorgerufenen Gegendrücke K_1, K_2, U durch Konstruktion und Rechnung der Größe und Richtung nach bestimmt werden.

Auflösung. Durch Rechnung ergibt sich nach den Gleichungen 54) und 55):

$$H = \frac{500 \cdot 1{,}4 \cdot 0{,}9 + 400 \cdot 0{,}4 \cdot 2{,}0}{2{,}0 \cdot 0{,}8 + 0{,}9 \cdot 1{,}0} = 380 \text{ kg}$$

$$V = \frac{500 \cdot 1{,}4 \cdot 0{,}8 - 400 \cdot 0{,}4 \cdot 1{,}0}{2{,}0 \cdot 0{,}8 + 0{,}9 \cdot 1{,}0} = 160 \text{ kg}$$

---

*) Vergl. Lauenstein, Graph. Statik, 3. Aufl., § 18, Die Gewölbe.

und nach den Gleichungen 56) und 57):

$$X_1 = 380 \text{ kg} \qquad X_2 = 380 \text{ kg}$$
$$Y_1 = 500 - 160 = 340 \text{ kg} \qquad Y_2 = 400 + 160 = 560 \text{ kg}$$

Nach den Gleichungen 58) erhält man dann für die Tangenten der Winkel γ, α_1, α_2 die Werte:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{160}{380} = 0{,}42105; \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{340}{380} = 0{,}89474; \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{560}{380} = 1{,}47368$$

Diesen Werten entsprechen die auf 10″ abgerundeten Winkel:

$$\gamma = 22^\circ 50' \qquad \alpha_1 = 41^\circ 49' 10'' \qquad \alpha_2 = 55^\circ 50' 30''$$

Die Größen der Kräfte U, K_1, K_2 ergeben sich nach den Gleichungen 59) zu:

$$U = \sqrt{380^2 + 160^2} = 412{,}3 \text{ kg}$$
$$K_1 = \sqrt{380^2 + 340^2} = 509{,}9 \text{ „}$$
$$K_2 = \sqrt{380^2 + 560^2} = 676{,}8 \text{ „}$$

Durch Konstruktion (Maßstab 1 : 10; Kräftemaßstab 100 kg = 1 cm) wurde gefunden:

$$\gamma = 23^\circ \qquad U = 410 \text{ kg}$$
$$\alpha_1 = 42^\circ \qquad K_1 = 510 \text{ „}$$
$$\alpha_2 = 56^\circ \qquad K_2 = 680 \text{ „}$$

§ 14.

Vom Gleichgewicht der Kräfte bei den Maschinen.

Unter Maschine im allgemeinen versteht man eine mechanische Vorrichtung, durch welche die Naturkräfte gezwungen werden, unter gewissen Bedingungen zu wirken. Der eigentliche Zweck der Maschine ist, eine mechanische Arbeit zu übertragen, d. h. eine in dieselbe eingeleitete mechanische Arbeit zu zwingen, eine andere von ersterer verschiedene mechanische Arbeit zu verrichten. Die von der Maschine zu verrichtende Arbeit besteht darin, einen Widerstand zu überwinden, der gewöhnlich als Last bezeichnet wird, im Gegensatz zu der dazu verwendeten Kraft. Bewegt sich die Last gleichförmig, so sind in jedem Augenblicke Kraft und Last an der Maschine im Gleichgewicht, die Maschine befindet sich dann im Beharrungszustande und es ist die bewegende Arbeit gleich der widerstehenden Arbeit.

Die widerstehende Arbeit in ihrer Gesamtheit besteht aus der nützlichen Arbeit, d. h. derjenigen Arbeit, deren Verrichtung der eigentliche Zweck der Maschine ist, und der schädlichen Arbeit (Ueberwindung der Reibungen, des Luftwiderstandes, Erzeugung von Wärme u. s. w.), und es ist daher die in die Maschine eingeleitete Arbeit (die Totalarbeit) stets größer

als die Nutzarbeit. Das Verhältnis der letzteren zu der Totalarbeit nennt man den Wirkungsgrad oder das Güteverhältnis der Maschine.

$$\frac{\textbf{Nutzarbeit}}{\textbf{Totalarbeit}} = \textbf{Güteverhältnis.}$$

Bei den nachfolgenden Untersuchungen über die Bedingungen, unter denen bei den Maschinen Gleichgewicht zwischen Kraft und Last stattfindet, soll von den schädlichen Arbeiten vorläufig abgesehen werden.

Eine Maschine kann entweder derart eingerichtet sein, daß eine gewünschte Bewegung der Last, abweichend von der Bewegung des Angriffspunktes der Kraft erzeugt wird, oder auch derart, daß durch eine kleinere Kraft ein größerer Widerstand überwunden oder eine größere Last gehoben wird. Da nun aber stets für den Gleichgewichtszustand die Arbeit der Kraft gleich der Arbeit der Last ist, so muß die Kraft in derselben Zeit einen sovielmal größeren Weg zurücklegen als die Last, sovielmal kleiner sie ist als die Last. Daraus folgt der wichtige Satz:

Was an Kraft gewonnen wird, geht an Geschwindigkeit (also an Zeit) verloren.

Eine Maschine ist im allgemeinen zusammengesetzt aus einzelnen Teilen, den sogen. Maschinenelementen oder Elementarmaschinen (mechanischen Potenzen), welche je nach der Art ihrer Bewegung auf zwei Grundformen zurückzuführen sind, und zwar auf den Hebel für drehende Bewegung und auf die schiefe Ebene für fortschreitende Bewegung. Abarten des Hebels sind das Wellrad und die Rolle, Abarten der schiefen Ebene die Schraube und der Keil.

1. Der Hebel.

Hebel nennt man jeden unbiegsamen, an einem Punkte unterstützten Körper, auf welchen Kräfte wirken, die denselben um den Stützpunkt oder Drehpunkt zu drehen suchen.

Fig. 82.

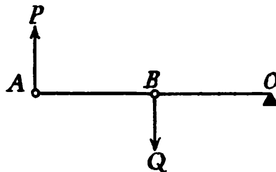
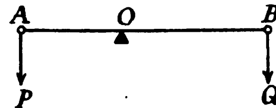


Fig. 83.



Liegt der Stützpunkt am Ende, so ist der Hebel einarmig (Fig. 82), liegt er zwischen den Angriffspunkten der Kräfte, zweiarmig (Fig. 83).

Meistens hat der Körper die Gestalt einer geraden oder auch einer in

einer Ebene liegenden, am Drehpunkt geknickten Linie; im letzteren Falle heißt der Hebel ein Winkelhebel (Fig. 84).

Fällt der Stützpunkt mit dem Schwerpunkte zusammen, so kann man den Hebel als einen gewichtlosen (mathematischen) betrachten. Einen Hebel, dessen Schwerpunkt nicht mit dem Stützpunkte zusammenfällt, nennt man einen physischen Hebel. Ein solcher kann ebenfalls als ein mathematischer Hebel behandelt werden, wenn sein Gewicht als eine im Schwerpunkt angreifende, vertikal abwärts gerichtete Einzelkraft G in Rechnung gebracht wird (Fig. 85).

Fig. 84.

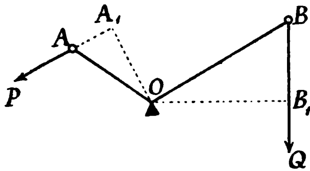
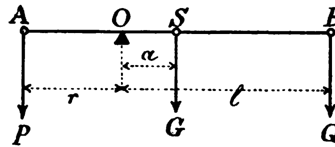


Fig. 85.



Auf den mathematischen Hebel lassen sich die unter § 7 S. 29 und 30 aufgeführten Gleichgewichtsbedingungen anwenden. Für Fig. 85 z. B. ist nach der Gleichgewichtsbedingung 2) der Druck auf den Unterstützungspunkt O:

$$= P + G + Q$$

und nach der Gleichgewichtsbedingung 3)

$$\mathbf{Pr = Ga + Ql} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 60)$$

Bei einem geradlinigen Hebel, auf welchen schief gerichtete, aber parallele Kräfte wirken, können statt der senkrechten Abstände der Kräfte vom Drehpunkte auch direkt die Hebelabschnitte in die Gleichgewichtsbedingung eingeführt werden. So ist für Fig. 86:

$$P \,.\, \overline{A_1 O} = Q \,.\, \overline{B_1 O}$$

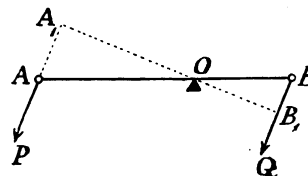
oder:

$$\frac{P}{Q} = \frac{B_1 O}{A_1 O} = \frac{BO}{AO}$$

folglich:

$$P \,.\, \overline{AO} = Q \,.\, \overline{BO}$$

Fig. 86.



Bei einem Winkelhebel und bei dem geradlinigen Hebel, auf welchen nicht parallele Kräfte wirken, sind dagegen stets die senkrechten Abstände der Kräfte vom Stützpunkte als Hebelarme zu nehmen, z. B. für Fig. 84:

$$P \,.\, A_1 O = Q \,.\, B_1 O$$

Auf den Gesetzen des Hebels beruht die Anwendung der Wagen.

Eine gute gleicharmige Wage (Krämerwage) muß folgende Bedingungen erfüllen:

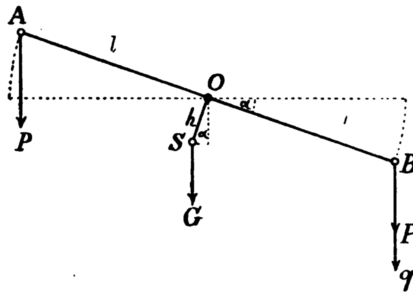
a) Sie muß **richtig** sein, d. h. bei gleicher Belastung der beiden Schalen muß der Wagebalken horizontal bleiben. Dies ist der Fall, wenn beide Arme genau gleich lang und symmetrisch ausgeführt sind und die Wagschalen gleiches Gewicht haben. Außerdem müssen die Aufhängepunkte der Schalen mit dem Drehpunkte des Wagebalkens in einer geraden Linie liegen.

b) Sie muß **stabil** sein. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn der Schwerpunkt bei der horizontalen Gleichgewichtslage des Wagebalkens senkrecht **unter** dem Unterstützungspunkte liegt.

c) Sie muß **empfindlich** sein, d. h. bei jeder beliebigen Belastung der Wage muß ein kleines Uebergewicht in der einen Schale dem Wagebalken sofort einen dem Uebergewichte proportionalen merklichen Ausschlag geben.

Bei der in Fig. 87 dargestellten Wage üben die gleichen Gewichte P keinen Einfluß auf die Gleichgewichtslage des Wagebalkens aus, da bei jeder Stellung desselben die Mittelkraft 2P dieser beiden Gewichte durch den Dreh-

Fig. 87.



punkt O hindurchgeht. Durch das an einer Seite hinzugefügte Uebergewicht q wird dagegen ein Ausschlagwinkel α hervorgebracht. Ist G das Eigengewicht der Wage, h der Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse O und l die Länge jedes der Arme, so erhält man nach Fig. 87

$$G h \sin \alpha = q l \cos \alpha$$

oder:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q}{G} \frac{l}{h}$$

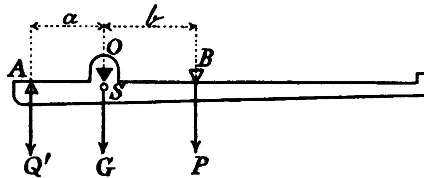
Aus dieser Gleichung geht hervor, daß bei einem bestimmten Uebergewicht der Winkel α um so größer, die Wage also um so empfindlicher ist, je geringer das Eigengewicht G derselben ist, je weniger tief der Schwerpunkt unter dem Drehpunkte liegt, und je größer die Armlänge l ausgeführt wird.

Die Empfindlichkeit einer Wage wird gewöhnlich ausgedrückt durch einen Bruch, dessen Zähler das kleinste, noch einen merklichen Ausschlag gebende Gewicht, und dessen Nenner die größte für die Wage zulässige Belastung ist. Eine gute Wage soll eine Empfindlichkeit von mindestens 1 : 60 000 besitzen.

Ist z. B. 30 kg die größte für die Wage zulässige Belastung, so muß, wenn jede Schale mit 15 kg belastet ist, durch ein Uebergewicht von 0,5 g noch ein merklicher Ausschlag erzeugt werden.

Die Schnellwage ist ein ungleicharmiger Hebel, dessen längerer Arm ein verschiebbares konstantes Gewicht P trägt, während am Ende des kürzeren Armes die Wagschale oder der Haken zum Anhängen der Last Q befestigt ist (Fig. 88).

Fig. 88.



Ist Q' das Gewicht des Hakens oder der Schale, so findet für die unbelastete Wage Gleichgewicht statt, wenn die Bedingung erfüllt ist:

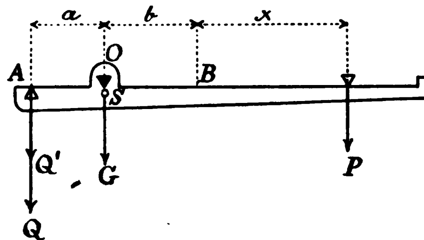
$$P b = Q' a$$

Hieraus läßt sich das Maß b berechnen, also die Lage des Punktes B bestimmen, der als Nullpunkt auf der Wage zu verzeichnen ist.

Wird dann in A die Last Q angehängt, so kann der Gleichgewichtszustand dadurch wieder hergestellt werden, daß das Gewicht P um eine Strecke x nach außen verschoben wird (Fig. 89). Die Gleichgewichtsbedingung lautet dann:

$$P(b + x) = (Q + Q') a$$

Fig. 89.



woraus durch Subtraktion der vorigen Gleichung von dieser letzteren folgt:

$$P x = Q a \quad \text{oder:} \quad Q = \frac{P x}{a}$$

Durch Messung der Länge x kann danach das unbekannte Gewicht Q ermittelt werden.

Die Zeigerwage (Fig. 90), welche u. a. vielfach als Briefwage benutzt wird, besteht der Hauptsache nach aus dem Winkelhebel A O C mit dem Dreh-

punkt O. In der Gleichgewichtslage der unbelasteten Wage möge der Schenkel O A den Winkel α mit der Horizontalen bilden. Dabei weist der am Ständer OE befestigte Zeiger D auf den Nullpunkt der (mit dem Winkelhebel verbundenen)

Fig. 90.

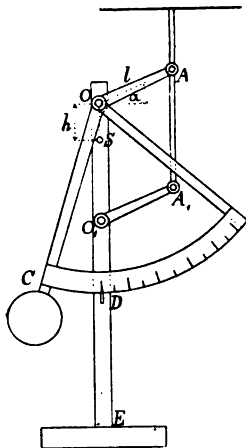
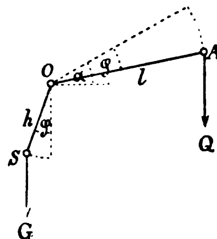


Fig. 91.



Bogenskala. Der Schwerpunkt S der beweglichen Teile der Wage liegt um h senkrecht unter dem Drehpunkt O.

Durch eine Last Q wird der ganze Hebel A O C um den Winkel φ verdreht. Wird das Eigengewicht der Wage (exklusive Ständer und Fuß) mit G bezeichnet, so ist (Fig. 91):

$$Q\,l \cos(\alpha - \varphi) = G\,h \sin\varphi$$

woraus folgt:

$$Q = G \frac{h}{l} \frac{\sin\varphi}{\cos(\alpha - \varphi)}$$

Die Gewichtsbestimmung wird, da der Faktor $G \frac{h}{l}$ für eine bestimmte Wage ein konstanter unveränderlicher Wert ist, hier also auf ein Winkelmessen zurückgeführt. Auf der Skala werden aber nicht die Zahlen für die Winkel selbst, sondern direkt für die entsprechenden Gewichte, z. B. von 10 zu 10 g, angegeben.

Die gewöhnliche Einrichtung ist derart, daß der Hebel O A bei der Hälfte des für die Wage bestimmten Maximalgewichtes horizontal steht. Dadurch wird erreicht, daß die Skalenteile von der Mitte ab nach beiden Seiten hin an Größe abnehmen*), während, wenn bei der unbelasteten Wage A O horizontal stände, die Teilung gleich vom Nullpunkt ab allmählich kleiner werden müßte. Dadurch würde aber das Gewicht der größeren Lasten sich nicht mit der Schärfe bestimmen lassen als das der kleineren.

Bei der (regelmäßig ausgeführten) Parallelogrammkonstruktion $O A A_1 O_1$ kann die Last Q auf jede beliebige Stelle des Tellers aufgelegt werden. Fügt man nämlich in der Achsenrichtung $A A_1$ zwei sich gegenseitig aufhebende Kräfte Q

*) Die Winkel selbst wachsen nämlich nicht proportional den Winkelfunktionen.

hinzu (Fig. 92), so drückt die eine derselben (die abwärts gerichtete) die Hebel OA und O_1A_1 direkt nieder. Das außerdem entstehende Moment Qx wird im Gleichgewichte gehalten durch das entgegengesetzt drehende Moment der in der Achsenrichtung der Hebel AO und O_1A_1 auftretenden und von den festen Drehpunkten O und O_1 aufgenommenen Kräfte K.

Durch Verlängerung der Hebel AO und A_1O_1 über die Punkte O und O_1 hinaus um die gleichen Stücke OB und O_1B_1, also durch verdoppelte Anord-

Fig. 92.

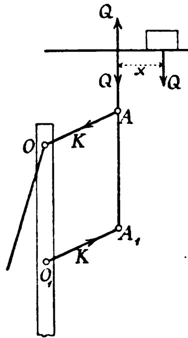
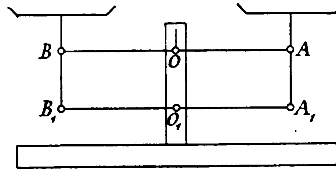


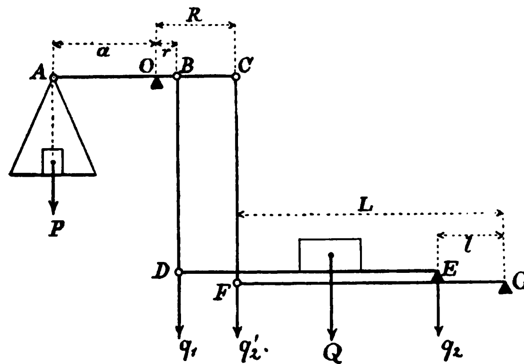
Fig. 93.



nung der Parallelogrammkonstruktion unter gleichzeitiger Fortlassung des Hebels OC entsteht die in Fig. 93 abgebildete sogen. Tafelwage.

Die Brückenwage von Quintenz (Straßburg 1821) besteht im wesentlichen aus 3 Hebeln und 2 Zugstangen, nämlich (Fig. 94) aus dem zweiarmigen Hebel AC mit dem Stützpunkte O, welcher in A die Gewichtsschale trägt, während in den Punkten B und C mittels der Zugstangen BD und CF die Endpunkte der

Fig. 94.



einarmigen Hebel DE und FG angehängt sind. Der Stützpunkt E des Hebels DE befindet sich auf dem Hebel FG und hat eine solche Lage, daß für die Hebel FG und OC dasselbe Teilungsverhältnis besteht, nämlich nach Fig. 94:

$$l : L = r : R$$

Bringt man nun eine Last Q auf die durch den Hebel DE unterstützte Brücke, so ist es gleichgültig, an welcher Stelle diese Last liegt, sie wird immer ihren Einfluß auf den Hebelarm OC so äußern, als ob sie direkt am Punkte B wirkte.

Sind nämlich q_1 und q_2 die Drücke, welche die Last Q auf die Punkte D und E ausübt, so ist das statische Moment von q_1 in Bezug auf den Drehpunkt O:

$$\mathfrak{M}_1 = q_1 r$$

Die Kraft q_2 zerlegt sich in zwei Drücke, von denen der eine durch den Gegendruck des festen Punktes G aufgehoben wird, der andere in F angreifende aber die Größe hat:

$$q_2' = q_2 \frac{l}{L} = q_2 \frac{r}{R}$$

Dieser Druck wirkt am Hebelarme R, also ist das statische Moment desselben in Bezug auf den Drehpunkt O:

$$\mathfrak{M}_2 = q_2 \frac{r}{R} R = q_2 r$$

Die Summe der statischen Momente der in B und C angreifenden Kräfte ist daher:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = q_1 r + q_2 r$$

oder da:

$$q_1 + q_2 = Q$$

ist, so wird:

$$\mathfrak{M} = Q r$$

Gewöhnlich ist $r = 0{,}1\ a$, so daß, da für den Gleichgewichtszustand:

$$P a = Q r$$

sein muß, das auf die Wagschale zu stellende Gewicht $P = 0{,}1\ Q$ wird (Decimalwage).

Aufgabe 47. Bei dem doppelarmigen Hebel Fig. 85, S. 65 sei:

$$G = 6 \text{ kg}; \quad Q = 20 \text{ kg}$$
$$l = 1 \text{ m}; \quad r = 0{,}4 \text{ m}; \quad a = 0{,}1 \text{ m}$$

Wie groß muß P sein, um den Hebel im Gleichgewichte zu halten?

Auflösung. Nach Gl. 60) ist:

$$P = \frac{G a + Q l}{r} = \frac{6 \,.\, 0{,}1 + 20 \,.\, 1}{0{,}4} = 51{,}5 \text{ kg}$$

Der Druck auf den Unterstützungspunkt ist:

$$P + G + Q = 51{,}5 + 6 + 20 = 77{,}5 \text{ kg}$$

Aufgabe 48. Auf einen einarmigen Hebel mit dem Drehpunkt O wirke eine vertikal aufwärts gerichtete Kraft von 200 kg am Hebelarm 12 cm. Wie groß muß das zur Herstellung des Gleichgewichtes im Abstande 80 cm vom Drehpunkte O angebrachte Gewicht P sein, wenn der Schwerpunkt des 5 kg schweren Hebels 32 cm von O entfernt ist?

Auflösung. Aus:

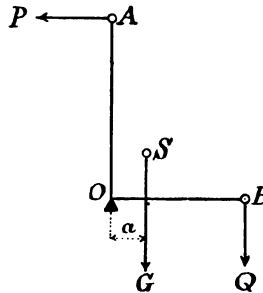
$$P \cdot 80 + 5 \cdot 32 = 200 \cdot 12$$

folgt:

$$P = \frac{200 \cdot 12 - 5 \cdot 32}{80} = 28 \text{ kg}$$

Aufgabe 49. An einem 8 kg schweren Winkelhebel A O B (Fig. 95), dessen vertikaler Arm O A = 80 cm, der horizontale Arm O B = 60 cm mißt, wirkt in B die vertikal abwärts ziehende Last Q = 30 kg. Es soll die Größe der in A angreifenden Horizontalkraft P bestimmt werden, welche der Last Q und dem am Hebelarme a = 15 cm wirkenden Hebelgewichte G das Gleichgewicht hält. Danach soll der Druck D auf den Unterstützungspunkt O berechnet werden.

Fig. 95.



Auflösung. Aus:

$$P \cdot 80 = 8 \cdot 15 + 30 \cdot 60$$

folgt:

$$P = 24 \text{ kg}$$

und danach:

$$D = \sqrt{(Q + G)^2 + P^2} = \sqrt{38^2 + 24^2} = 45 \text{ kg}$$

Aufgabe 50. Eine 120 cm lange, 6,6 kg schwere prismatische Stange A B wurde in A durch ein Gewicht P = 35 kg, in B durch ein Gewicht Q = 20 kg belastet. Wo muß die Stange unterstützt sein, um sich im Gleichgewicht zu befinden?

Auflösung. Bezeichnet man den unbekannten Abstand A O (vergl. Fig. 85, S. 65) mit r, so ist:

$$O S = 60 - r$$
$$O B = 120 - r$$

und man erhält:

$$35 \cdot r = 6{,}6\,(60 - r) + 20\,(120 - r)$$

woraus folgt:

$$r = 45 \text{ cm}$$

Aufgabe 51. Ein Körper wog in der einen Schale einer (unrichtigen) Krämerwage 3 kg, in der anderen Schale 3,4 kg. Wie groß ist das richtige Gewicht Q des Körpers?

Auflösung. Bezeichnet man die Längen der beiden Arme des Wagebalkens mit l_1 und l_2, so hat man

aus der ersten Wägung: $3 : Q = l_1 : l_2$
" " zweiten " $Q : 3{,}4 = l_1 : l_2$
folglich: $3 : Q = Q : 3{,}4$

und daraus:

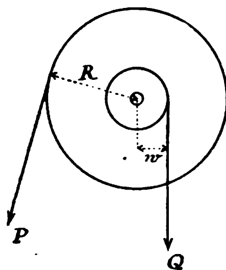
$$Q = \sqrt{3 \cdot 3{,}4} = 3{,}1937 \text{ kg}$$

2. Das Wellrad.

Das Wellrad oder das Rad an der Welle (Fig. 96) besteht in seiner einfachsten Form aus einem Rade, welches mit einer cylindrischen Walze (Welle) fest verbunden (verkeilt) ist, so daß beide eine gemeinsame geometrische Achse haben. Die Welle ist an ihren Enden mit Zapfen versehen, die durch Lager unterstützt sind und sich in diesen drehen können.

Die Welle kann horizontal oder vertikal angeordnet sein, das Rad als Schnurscheibe, Riemenscheibe oder Zahnrad konstruiert, auch durch eine Kurbel oder durch Speichen ersetzt sein.

Fig. 96.



Der Zweck des Wellrades ist, durch eine am Umfang des Rades angreifende Kraft P eine am Umfang der Welle wirkende Last Q im Gleichgewicht zu halten, bezw. gleichförmig zu heben. Die Gleichgewichtsbedingung ist dieselbe, wie beim zweiarmigen Hebel, wobei der Halbmesser des Rades als Hebelarm der Kraft, der Halbmesser der Welle als Halbmesser der Last zu betrachten ist.

Ist R der Halbmesser des Rades, w der Halbmesser der Welle, so hat man ohne Berücksichtigung der Reibungen:

$$P R = Q w$$

oder:

$$\frac{P}{Q} = \frac{w}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 61)$$

Die Kraft verhält sich zur Last, wie der Halbmesser der Welle zu dem Halbmesser des Rades.

Statt am Umfang der Welle selbst kann die Last Q auch am Umfang einer auf der Welle befestigten Trommel wirken. Ferner kann die Kraft am Umfange des Rades zugleich Last für eine zweite Wellradvorrichtung sein, die mit ersterer derart in Verbindung steht, daß das Rad der ersten Welle die an seinem Umfange wirkende Kraft auf eine zweite Welle oder ein auf diese gesetztes Trieb überträgt. Auf diese Weise gelangt man zu einem zusammengesetzten Räderwerke, von welchem Fig. 97 eine schematische Darstellung gibt.

Nach den Bezeichnungen der Fig. 97 ist die Gleichgewichtsbedingung

für die Welle I: $Q w = P_1 R_1$ oder $P_1 = \frac{Q w}{R_1}$

" " " II: $P_1 r_1 = P_2 R_2$ " $P_2 = \frac{P_1 r_1}{R_2}$

" " " III: $P_2 r_2 = P R$ " $P = \frac{P_2 r_2}{R}$

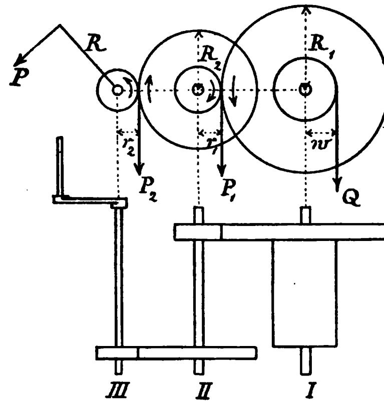
Setzt man in der letzten Gleichung für P_2 den in der vorletzten Gleichung gefundenen Wert, dann weiter für P_1 den in der Gleichung für Welle I gefundenen Wert ein, so erhält man:

$$P = P_1 \frac{r_1}{R_2} \frac{r_2}{R} = Q \frac{w}{R_1} \frac{r_1}{R_2} \frac{r_2}{R}$$

oder:

$$\frac{P}{Q} = \frac{w}{R} \frac{r_1}{R_1} \frac{r_2}{R_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 62)$$

Fig. 97.



Da sich die Halbmesser der Räder wie die Umfänge verhalten, bei Zahnrädern aber die Umfänge wie die Zähnezahlen (denn ein Rad, dessen Umfang z. B. doppelt so groß als der eines anderen ist, hat auch doppelt so viel Zähne als das andere Rad), so kann man statt der Verhältnisse $\frac{r_1}{R_1}$, $\frac{r_2}{R_2}$ in Gl. 62) bei Zahnrädern auch die Verhältnisse der betreffenden Zähnezahlen $\frac{z_1}{Z_1}$, $\frac{z_2}{Z_2}$ setzen, wodurch man erhält:

$$\frac{P}{Q} = \frac{w}{R} \frac{z_1}{Z_1} \frac{z_2}{Z_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 63)$$

Aus dem Satze:

Arbeit der Kraft = Arbeit der Last

folgt, wenn v die Geschwindigkeit der Kraft, c die der Last bedeutet:

$$Pv = Qc \text{ oder } c = \frac{P}{Q} v \quad \ldots\ldots \quad 64)$$

Aufgabe 52. Wie groß ist die Kraft P, welche an einem Wellrade eine Last Q = 500 kg im Gleichgewicht hält, wenn der Halbmesser des Rades: R = 75 cm, der der Welle: w = 15 cm ist?

Auflösung. Nach Gl. 61) ist:

$$P = Q \frac{w}{R} = 500 \cdot \frac{15}{75} = 100 \text{ kg}$$

Aufgabe 53. Um eine an ihrem Ende mit einer Kurbel von 40 cm Radius versehene Welle ist ein Seil geschlungen, an welchem eine Last von 200 kg befestigt ist. Wie groß muß der Halbmesser w der Welle sein, damit durch eine an der Kurbel wirkende Kraft von 32 kg die Last (ohne Rücksicht auf die Reibungen) gleichförmig gehoben wird?

Auflösung. Nach Gl. 61) ist:

$$w = \frac{PR}{Q} = \frac{32 \cdot 40}{200} = 6{,}4 \text{ cm}$$

Aufgabe 54. Die Kurbel einer Winde hat 40 cm Halbmesser, das Trieb auf der Kurbelwelle 10 cm, das Rad auf der Trommelwelle 60 cm Halbmesser. Welche Last kann theoretisch durch 4 Arbeiter, von denen jeder 16 kg Druck ausübt, mit der Winde gehoben werden, wenn der Halbmesser der Trommel = 10 cm ist?

Auflösung. Analog der Gl. 62) hat man:

$$\frac{P}{Q} = \frac{w}{R} \frac{r_1}{R_1}$$

hierin ist zu setzen:

$$P = 4 \cdot 16 = 64 \text{ kg}$$
$$w = 10; \qquad R = 40$$
$$r_1 = 10; \qquad R_1 = 60$$

folglich:

$$Q = P \frac{R}{w} \frac{R_1}{r_1} = 64 \cdot \frac{40}{10} \cdot \frac{60}{10} = 1536 \text{ kg}$$

Aufgabe 55. Es soll eine Winde mit zwei Räderpaaren (doppeltem Vorgelege) konstruiert werden, mit welcher eine Last Q = 3000 kg durch 4 Arbeiter gehoben werden kann. Dabei ist gegeben: Kraft eines Arbeiters an der Kurbel = 15 kg; Kurbelradius R = 40 cm; Halbmesser der Trommel (inkl. halbe Seildicke) w = 20 cm. In welchem Verhältnis müssen die Radien der Räder zu einander stehen?

Auflösung. Die Kraft an der Kurbel ist:

$$P = 4 \cdot 15 = 60 \text{ kg}$$

folglich:

$$PR = 60 \cdot 40 = 2400 \text{ kg}$$

Das Moment der Last ist:

$$Qw = 3000 \cdot 20 = 60000$$

daher:

$$\frac{PR}{Qw} = \frac{2400}{60000} = \frac{1}{25}$$

Da nun nach Gl. 62):

$$\frac{PR}{Qw} = \frac{r_1}{R_1} \frac{r_2}{R_2}$$

ist, so wird:

$$\frac{r_1}{R_1} \frac{r_2}{R_2} = \frac{1}{25}$$

Wie das Verhältnis $\frac{1}{25}$ in zwei Faktoren zerlegt wird, wäre theoretisch zwar gleichgültig, praktisch ist es jedoch wünschenswert, die Faktoren einigermaßen gleich zu erhalten, z. B.

$$\frac{1}{25} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \text{ oder } = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6{,}25}$$

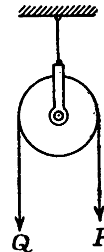
Nimmt man die Geschwindigkeit der Kraft an der Kurbel zu $v = 0{,}8$ m an, so ist die Geschwindigkeit der Last:

$$c = \frac{P}{Q} v = \frac{60}{3000} \cdot 0{,}8 = 0{,}016 \text{ m}$$

3. Die Rolle.

Die Rolle ist eine verhältnismäßig schmale kreisförmige Scheibe, welche um eine senkrecht zu ihrer Ebene gerichtete und durch ihren Mittelpunkt gehende Achse drehbar ist und an ihrem Umfange eine zur Aufnahme des Seiles oder der Kette dienende rinnenförmige Vertiefung hat. Die Achse der Rolle ist an ihren beiden Enden in dem Rollengehäuse fest gelagert.

Fig. 98.



Man unterscheidet feste und lose Rolle.

Unter einer festen Rolle versteht man eine solche, bei welcher das Rollengehäuse an einem unbeweglichen Punkte befestigt ist, so daß die Rolle keine fortschreitende, sondern nur eine Drehbewegung ausführen kann (Fig. 98). An dem einen Seilende wirkt die Kraft, an dem anderen die Last, und da beide gleichen Abstand von der Drehachse haben, so muß für den Fall des Gleichgewichts die Kraft gleich der Last sein.

Bei der festen Rolle wird also an Kraft nichts gewonnen und sie dient nur dazu, der Kraft eine andere gewünschte Richtung zu geben (Leitrolle).

Die bewegliche oder lose Rolle führt außer der Drehbewegung noch eine fortschreitende Bewegung aus. Die Last Q hängt an einem Haken des Rollengehäuses und wird durch das Seil getragen, dessen eines Ende an einem unbeweglichen Punkte befestigt ist, während an dem anderen Ende die Kraft P wirkt, entweder direkt, wie in Fig. 99, oder nachdem das Seil noch über eine feste Rolle geschlungen ist, wie in Fig. 100.

Sind die beiden Seilenden einander parallel, so findet Gleichgewicht statt, wenn die Kraft halb so groß ist wie die Last. Dabei ist das Gewicht der losen Rolle nebst dem Gehäuse mit zu der Last zu rechnen; meistens kann dasselbe indessen als vergleichsweise klein im Verhältnis zu der Last unberücksichtigt bleiben.

Man kann die Wirkung der losen Rolle auf die Wirkung eines einarmigen Hebels zurückführen. Denkt man sich nämlich den Befestigungspunkt A

(Fig. 99) des festen Seilendes nach dem Punkte a an den Umfang der Rolle verlegt, so kann man a als den Stützpunkt des Hebels ab betrachten. Es ist

Fig. 99.

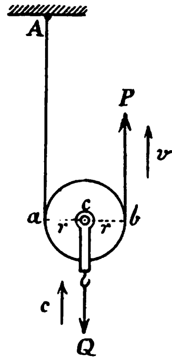
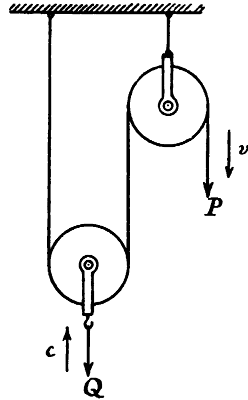
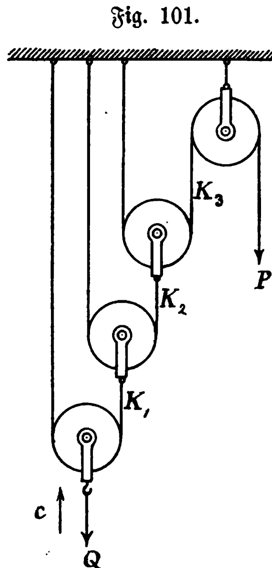


Fig. 100.



dann b der Angriffspunkt der Kraft P, c der Angriffspunkt der Last Q, und wenn man den Halbmesser der Rolle mit r bezeichnet, so hat man:

Fig. 101.



$$P \cdot 2r = Q r$$

oder:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\mathbf{Q} \quad . \; . \; . \quad 65)$$

Da hier, wie stets, die Arbeit der Kraft gleich der Arbeit der Last ist, so folgt aus der letzten Gleichung, daß in derselben Zeit die Kraft den doppelten Weg zurücklegen muß als die Last. Ist also die Geschwindigkeit der Kraft = v, so wird die Geschwindigkeit c der Last:

$$c = \frac{1}{2} v \quad . \; . \; . \; . \quad 66)$$

Vereinigt man eine feste mit mehreren losen Rollen in der Weise, wie Fig. 101 zeigt, so nennt man eine solche Vorrichtung einen Rollenzug oder Potenzenzug. Die unterste Rolle trägt die Last Q, die Kraft P wirkt an dem über die feste Rolle geschlungenen Seilende. Die Spannung des Seiles, welches die unterste Rolle umschlingt, ist:

$$K_1 = \frac{Q}{2}$$

K_1 ist zugleich Last für die zweite Rolle, folglich ist die Spannung des um diese zweite Rolle geschlungenen Seiles:

$$K_2 = \frac{K_1}{2} = \frac{Q}{4} = \frac{Q}{2^2}$$

In derselben Weise erhält man:

$$K_3 = \frac{Q}{8} = \frac{Q}{2^3}$$

und allgemein bei n losen Rollen:

$$\mathbf{K_n = P = \frac{Q}{2^n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 67)$$

Die Kraft P ist also gleich der Last Q, dividiert durch die soviele Potenz von 2, so viel lose Rollen in dem Rollenzuge vorhanden sind. (Daher der Name Potenzenzug.)

Bei 4 losen Rollen kann z. B. durch eine Kraft P eine Last Q gehoben werden, welche $2^4 = 16$mal so groß als die Kraft ist; bei 5 losen Rollen wird:

$$Q = 2^5 P = 32 P$$

u. s. w.

Ist bei n losen Rollen die Geschwindigkeit der Kraft = v, so wird die Geschwindigkeit c der Last:

$$\mathbf{c = \frac{v}{2^n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 68)$$

Obgleich bei dem Potenzenzug durch eine kleine Kraft eine verhältnismäßig große Last gehoben werden kann, so findet derselbe doch im ganzen wenig Anwendung.

Eine andere, praktisch viel wichtigere Verbindung von Rollen zu einer Zugvorrichtung findet bei dem sogen. Flaschenzuge (Fig. 102) statt, bei welchem mehrere Rollen in einem gemeinsamen Gehäuse (einer Flasche) entweder übereinander oder häufiger nebeneinander drehbar befestigt sind. In Fig. 102 sind die Rollen der Deutlichkeit wegen untereinander gezeichnet.

Ein vollständiger Flaschenzug besteht aus einer oberen festen und einer beweglichen unteren Flasche; an letzterer hängt die Last Q. Das Seil ist an der oberen Flasche befestigt und läuft abwechselnd über je eine Rolle der unteren und oberen Flasche; am letzten freien Ende desselben wirkt die Kraft P.

Hat die untere Flasche n Rollen, so wird die Last durch 2n Seile getragen, von denen jedes mit der Kraft P angespannt ist. Unter Vernachlässigung der (hier übrigens ziemlich beträchtlichen) Reibungen erhält man daher als Gleichgewichtsbedingung:

$$\mathbf{Q = 2n\,P} \text{ oder } \mathbf{P = \frac{Q}{2n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 69)$$

Die Kraft ist gleich der Last, dividiert durch die doppelte Anzahl der losen Rollen.

Wird wieder die Geschwindigkeit der Kraft mit v bezeichnet, so ist die Geschwindigkeit der Last:

$$c = \frac{v}{2n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 70)$$

Der Differentialflaschenzug besteht aus zwei miteinander verbundenen (meist in einem Stück gegossenen) festen Rollen von verschiedenem Durchmesser, die sich um eine gemeinschaftliche Achse drehen, und aus einer

Fig. 102.

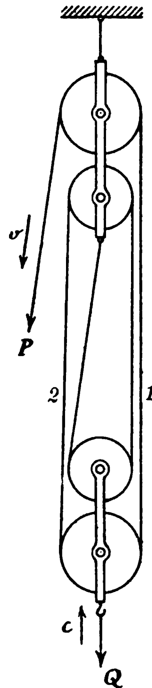
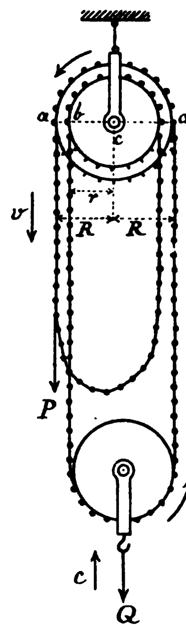


Fig. 103.



losen Rolle, an deren Haken die Last hängt (Fig. 103). Die Rollen sind mit Stegen versehen, die sich zwischen die Schaken der Kette legen und ein Gleiten derselben an den Rollenumfängen verhindern.

Beim Aufziehen der Last wickelt sich die endlose Kette an der einen Seite von der kleinen Rolle ab und zugleich an der anderen Seite auf der großen Rolle auf. Da die Spannung jedes dieser Kettenteile, die zusammen die Last Q zu tragen haben, $\frac{1}{2}$ Q beträgt, so ist, wenn man a b c d als doppelarmigen Hebel mit dem Drehpunkte c ansieht, die Gleichgewichtsbedingung:

$$P \cdot \overline{ac} + \frac{1}{2} Q \cdot \overline{bc} = \frac{1}{2} Q \cdot \overline{cd}$$

oder wenn die Halbmesser der Rollen mit R bezw. r bezeichnet werden:

$$P R + \frac{1}{2} Q r = \frac{1}{2} Q R$$

woraus folgt:

$$P = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 71)$$

Aus der Bedingung:

$$Q c = P v$$

ergibt sich für die Geschwindigkeit der Last der Wert:

$$c = \frac{v}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 72)$$

Ein wesentlicher Vorteil des Differentialflaschenzuges besteht noch darin, daß, wenn der Unterschied der Rollenhalbmesser R und r nicht zu groß ist, ein selbstthätiges Zurückgehen der Last durch die Widerstände allein verhindert wird. Es bedarf also keiner weiteren Kraft, um die Last in einer beliebigen Höhe zu halten. Meistens findet man bei den käuflichen Differentialflaschenzügen das Verhältnis:

$$\frac{r}{R} = \frac{11}{12}$$

Aufgabe 56. Wie groß ist die Kraft, welche erforderlich ist, eine Last von 200 kg mittels einer losen, 6 kg schweren Rolle zu heben?

Auflösung.

$$P = \frac{Q + G}{2} = \frac{200 + 6}{2} = 103 \text{ kg}$$

Aufgabe 57. Eine Last von 400 kg soll mit einem Potenzenzug, der drei lose Rollen enthält, gehoben werden. Wie groß ist die dazu erforderliche Kraft ohne Berücksichtigung des Rollengewichtes?

Auflösung. Nach Gl. 67) ist:

$$P = \frac{Q}{2^3} = \frac{400}{8} = 50 \text{ kg}$$

Aufgabe 58. Wenn in voriger Aufgabe das Gewicht jeder Rolle mit G = 6 kg berücksichtigt wird, wie groß ergibt sich dann die Kraft?

Auflösung. Allgemein ist:

$$P = \frac{Q + (2^n - 1) G}{2^n}$$

also hier:

$$P = \frac{Q + (2^3 - 1) G}{2^3} = \frac{Q + 7 G}{8} = \frac{400 + 42}{8} = 55{,}25 \text{ kg}$$

Aufgabe 59. Zwei Arbeiter, von denen jeder 75 kg wiegt, hängen sich an das freie Seilende eines Flaschenzuges von 4 losen Rollen. Welche Last können sie in die Höhe ziehen, wenn das Gewicht der Flasche mit 10 kg in Anrechnung gebracht wird, und wie verhalten sich dabei die Wege der Kraft und der Last?

Auflösung.

$$Q = 8 P - G = 8 \, . \, 150 - 10 = 1190 \text{ kg}$$

Der Weg der Kraft ist achtmal so groß als der der Last.

Aufgabe 60. Welche Last kann mittels eines Differentialflaschenzuges gehoben werden, wenn $\frac{r}{R} = \frac{11}{12}$ und die Kraft P = 50 kg ist?

Auflösung. Nach Gl. 71) ist:

$$Q = \frac{2P}{1 - \frac{r}{R}} = \frac{2 \;.\, 50}{1 - \frac{11}{12}} = 1200 \text{ kg}$$

4. Die schiefe Ebene.

Unter einer schiefen Ebene versteht man eine ebene Fläche, welche mit der Horizontalen irgend einen Winkel α bildet (Fig. 104). Wird von einem Punkte C derselben das Lot CB auf die Horizontale gefällt, so nennt man:

AC = l die Länge der schiefen Ebene
AB = b „ Basis „ „ „
BC = h „ Höhe „ „ „

Befindet sich ein Körper auf der schiefen Ebene und man zerlegt das im Schwerpunkte S angreifende Gewicht G desselben in zwei Komponenten, von denen die eine SD der Richtung AC parallel, die andere SF senkrecht dazu gerichtet ist, so wird letztere durch den Gegendruck N der schiefen Ebene aufgehoben.

Fig. 104.

$$N = SF = DE$$

Unter der Einwirkung der Komponente SD würde der Körper (abgesehen von den Reibungswiderständen) eine abwärts gerichtete gleichförmig beschleunigte Bewegung ausführen. Um daher den Körper im Gleichgewichte zu halten, dazu bedarf es einer Kraft P, welche gleich, aber entgegengesetzt gerichtet der Komponente SD ist.

$$P = SD$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke SDE und ABC folgt aber:

$$DE : SE = AB : AC$$

oder:

$$N : G = b : l$$

Der Normaldruck verhält sich zum Gewichte des Körpers, wie die Basis der schiefen Ebene zu ihrer Länge.

Aus der letzten Gleichung ergibt sich der Normaldruck:

$$N = G \frac{b}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 73)$$

Aus denselben Dreiecken SDE und ABC folgt ferner:

$$SD : SE = BC : AC$$

oder:

$$P : G = h : l$$

Die Kraft verhält sich zur Last (dem Gewichte des Körpers) wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge.

Danach ergibt sich für die Kraft P der Wert:

$$P = G \frac{h}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 74)$$

Trigonometrisch ist:

$$P = G \,.\, \sin \alpha$$
$$N = G \,.\, \cos \alpha$$

Wirkt die Kraft P, welche erforderlich ist, den Körper im Gleichgewicht zu halten, nicht parallel der schiefen Ebene selbst, sondern parallel der Basis AB (Fig. 105), so muß die Resultierende aus G und P senkrecht zu AC gerichtet sein. Konstruiert man daher das Kräfteparallelogramm SEFD, in welchem die Seite SE gleich dem bekannten Körpergewichte G ist, so stellt die Seite SD (= EF) die Größe der Kraft P, die Diagonale SF ($\perp$ AC) die Größe der Resultierenden aus G und P dar, welch letztere gleich dem normalen Gegendrucke N ist.

Fig. 105.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke SEF und ABC folgt aber:

$$SF : SE = AC : AB$$

oder:

$$N : G = l : b$$

Der Normaldruck verhält sich zur Last, wie die Länge der schiefen Ebene zu ihrer Basis.

Der Normaldruck hat also die Größe:

$$N = G \frac{l}{b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 75)$$

Ferner folgt aus denselben Dreiecken:

$$EF : SE = BC : AB$$

oder:

$$P : G = h : b$$

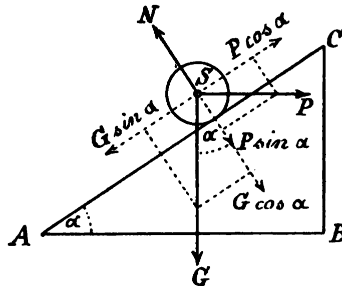
Die Horizontalkraft P verhält sich zur Last, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Basis.

Danach ist:

$$P = G \frac{h}{b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 76)$$

Trigonometrisch ergibt sich, wenn nach Fig. 106 die Kräfte G und P in ihre Komponenten parallel A C und senkrecht zu A C zerlegt werden:

Fig. 106.



$$P \cos \alpha = G \sin \alpha \text{ oder } P = G \operatorname{tg} \alpha$$

und:

$$N = P \sin \alpha + G \cos \alpha$$

oder wenn für P der gefundene Wert eingesetzt wird:

$$N = G \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha + G \cos \alpha$$

$$N = G \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin \alpha + G \cos \alpha$$

und wenn das zweite Glied der rechten Seite auch auf den Nenner $\cos \alpha$ gebracht wird:

$$N = G \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{G}{\cos \alpha}$$

Aufgabe 61. Auf einer schiefen Ebene, deren Basis $b = 4$ m und deren Höhe $h = 3$ m sei, befindet sich eine Last $G = 200$ kg. Wie groß muß die Kraft P sein, welche diese Last im Gleichgewicht hält, und wie groß ist der senkrecht zur schiefen Ebene gerichtete Gegendruck N

a) wenn die Kraft P parallel der schiefen Ebene wirkt?
b) wenn die Kraft P parallel der Basis wirkt?

Auflösung. Da die Länge der schiefen Ebene:

$$l = \sqrt{b^2 + h^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ m}$$

beträgt, so ist

für a) nach Gl. 73: $N = 200 \cdot \frac{4}{5} = 160$ kg

„ „ 74: $P = 200 \cdot \frac{3}{5} = 120$ „

für b) nach Gl. 75: $N = 200 \cdot \frac{5}{4} = 250$ „

„ „ 76: $P = 200 \cdot \frac{3}{4} = 150$ „

Aufgabe 62. Wie groß muß eine Horizontalkraft P sein, welche im stande ist, einen Eisenbahnwagen von 1000 kg Gewicht auf einer Bahnstrecke von 1 : 100 Steigung (d. h. die auf 100 m Länge um einen Meter ansteigt) am Herablaufen zu hindern?

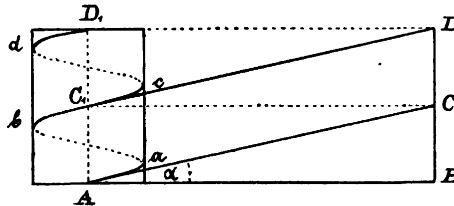
Auflösung. Nach Gl. 76) ist:

$$P = 1000 \cdot \frac{1}{100} = 10 \text{ kg}$$

5. Die Schraube.

Wird die Ebene eines Winkels $\alpha = BAC$ (Fig. 107) so um einen geraden Kreiscylinder gewickelt, daß der eine Schenkel A B senkrecht zur Cylinderachse liegt, so beschreibt der andere Schenkel A C eine Schraubenlinie. Ist die

Fig. 107.



Länge A B gleich dem Umfang des Cylinders, so wird bei der Umwickelung der Punkt B auf A fallen und der Punkt C die Lage C_1 senkrecht über A annehmen. Die Entfernung AC_1, d. i. der Abstand je zweier Schraubenwindungen, heißt die Ganghöhe; der Winkel α wird der Steigungswinkel genannt. Der zwischen den Punkten A und C_1 liegende Teil der Schraubenlinie $AabC_1$ bildet einen Schraubengang. Wickelt man weiter in C_1 beginnend ein dem Dreieck ABC gleiches Dreieck C_1CD auf dem Kreiscylinder ab, so beschreibt der Schenkel C_1D einen zweiten Schraubengang C_1cdD_1 u. s. w.

Fig. 108.

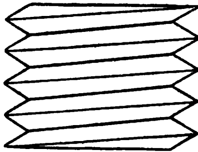
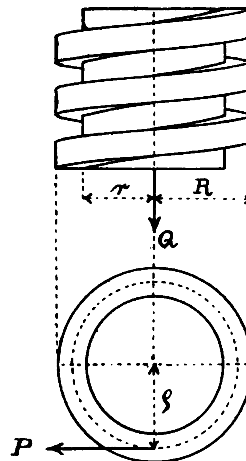


Fig. 109.



Bewegt sich nun ein gleichschenkliges Dreieck an der Schraubenlinie entlang auf dem Cylindermantel, so entsteht eine scharfgängige Schraube (Fig. 108); tritt an Stelle des Dreiecks ein Quadrat, so entsteht die flachgängige Schraube (Fig. 109).

Eine vollständige Schraube besteht aus zwei Teilen. Der eine Teil mit erhabenem Gewinde bildet die eigentliche Schraube oder die Schraubenspindel, der andere Teil mit vertieftem Gewinde, welches entsteht, wenn in einen hohlen Cylinder längs der Schraubenlinie ein solcher hohler Raum eingeschnitten wird, daß die Spindel genau hineinpaßt, ist die Mutter.

Die scharfgängigen Schrauben finden hauptsächlich Verwendung als Befestigungsmittel, die flachgängigen Schrauben als Mittel, um eine drehende

Bewegung in eine fortschreitende zu verwandeln (Preßschrauben, Selbstgangspindeln). Dabei dreht sich die Spindel in der Mutter, oder die Mutter um die Spindel, wobei entweder der eine oder der andere Teil eine fortschreitende Bewegung ausführen kann.

Die Schraube kann nach der obigen Erklärung als eine um einen Cylinder gewundene schiefe Ebene betrachtet werden, deren Basis gleich dem Umfange des Cylinders, und deren Höhe gleich der Ganghöhe der Schraube ist. Die Kraft P wirkt tangentiell am Umfange der Schraube und parallel der Basis A B der schiefen Ebene, die Last Q senkrecht zu A B; die Gleichgewichtsbedingung für die Schraube stimmt daher überein mit der in Gl. 76) S. 81 ausgesprochenen Gleichgewichtsbedingung für die schiefe Ebene.

Wird die Last mit Q, der mittlere Halbmesser der Schraube mit ϱ $\left(=\frac{R+r}{2}\right)$, also der Umfang derselben mit $2\varrho\pi$ bezeichnet, so folgt aus Gl. 76):

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\,\frac{\mathbf{h}}{2\varrho\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 77)$$

Die Kraft verhält sich zur Last, wie die Höhe eines Schraubenganges zum mittleren Umfang der Schraube.

Zu der Gl. 77 gelangt man auch durch die Ueberlegung, daß während eines Umganges der Weg der Kraft $= 2\pi\varrho$, der Weg der Last $= h$ beträgt, daher:

$$P\,2\varrho\pi = Q\,h$$

sein muß, woraus wieder für P der in Gl. 77) angegebene Wert folgt.

Multipliziert man beide Seiten der Gl. 77) mit ϱ, so ergibt sich:

$$P\varrho = Q\varrho\,\frac{h}{2\varrho\pi}$$

Hierin kann das Moment $P\varrho$ der Kraft ersetzt werden durch irgend ein anderes gleichwertiges Moment K l, wobei l die Länge eines einarmigen Hebels bedeutet, an dessen Endpunkte die Kraft K angreift. Man erhält dadurch:

$$\mathbf{K\,l} = \mathbf{Q}\varrho\,\frac{\mathbf{h}}{2\varrho\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 78)$$

oder trigonometrisch:

$$\mathbf{K\,l} = \mathbf{Q}\varrho\,\mathbf{tg}\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 79)$$

Aufgabe 63. Mit einer Schraube, deren äußerer Durchmesser = 5 cm, deren innerer Durchmesser = 4 cm und deren Ganghöhe = 1 cm beträgt, soll ein Druck von 5000 kg ausgeübt werden. Wie groß ist die dazu erforderliche Kraft

a) wenn dieselbe am Umfange des mittleren Schraubenhalbmessers angreift?

b) wenn sie an einem Hebelarme l = 50 cm wirkt?

Auflösung. Aus R = 2,5 cm und r = 2 cm ergibt sich der mittlere Schraubenhalbmesser zu:

$$\rho = \frac{2{,}5 + 2}{2} = 2{,}25 \text{ cm}$$

der Umfang zu:

$$2\rho\pi = 14{,}137 \text{ cm}$$

für a) ist dann nach Gl. 77):

$$P = 5000 \cdot \frac{1}{14{,}137} = 354 \text{ kg}$$

für b) nach Gl. 78):

$$K = \frac{5000}{50} \cdot 2{,}25 \cdot \frac{1}{14{,}137} = 15{,}9 \text{ kg}$$

6. Der Keil.

Der Keil (Fig. 110) ist ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche meistens ein gleichschenkliges Dreieck bildet und welches als bewegliche, zweifach schiefe

Fig. 110.

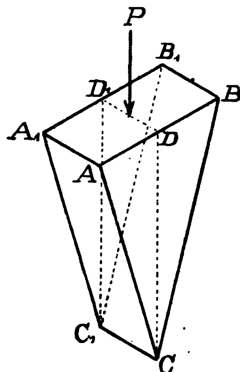
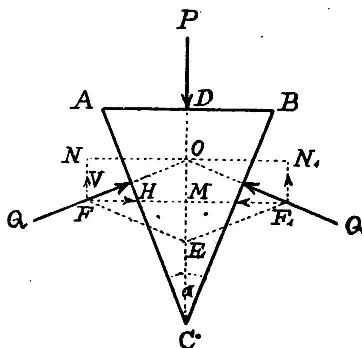


Fig. 111.



Ebene betrachtet werden kann. Die Flächen AA_1C_1C und BB_1C_1C heißen die **Seiten**, die Fläche AA_1B_1B ist der **Rücken** und die Mittellinie CD die **Höhe** des Keiles.

Der Zweck des Keiles, welcher entweder als Befestigungsmittel dient oder zur Trennung zweier Flächen angewandt wird, besteht darin, durch eine gewöhnlich senkrecht am Rücken angreifende Kraft P zwei an den Seiten wirkende Widerstände oder Lasten Q zu überwinden.

Wirken die Lasten Q senkrecht auf die Seiten AC und BC des Keiles (Fig. 111) und zerlegt man die Kraft $P = OE$ in die normal zu AC bezw. BC gerichteten Komponenten OF und OF_1, so muß für den Fall des Gleichgewichts jede derselben gleich der in entgegengesetzter Richtung wirkenden Last Q sein, daher:

$$P : Q = OE : OF$$

Da aber wegen Aehnlichkeit der Dreiecke OEF und ABC das Verhältnis besteht:

$$OE : OF = AB : AC$$

so folgt:

$$\mathbf{P : Q = AB : AC} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 80)$$

Die Kraft verhält sich zur Last, wie der Rücken des Keiles zur Seite.

Wird der Winkel bei C mit α bezeichnet, so ist trigonometrisch:

$$\frac{\frac{1}{2} P}{Q} = \sin \frac{\alpha}{2}$$

woraus folgt:

$$\mathbf{P = 2 Q \sin \frac{\alpha}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 81)$$

Zerlegt man die Lasten Q in die Komponenten H (senkrecht zu CD) und V (parallel CD), so ergibt sich nach Fig. 111 aus der Aehnlichkeit der Dreiecke OFM und ACD:

$$Q : H = AC : CD$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit Gl. 80) folgt aber:

$$\mathbf{P : H = AB : CD} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 82)$$

Trigonometrisch ist:

$$\mathbf{P = 2 H tg \frac{\alpha}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 83)$$

Aufgabe 64. Bei einem Keile (Fig. 111) sei AB = 4 cm; AC = BC = 32 cm. Auf jede der beiden Keilseiten und normal zu denselben wirke eine Last Q = 500 kg. Durch welche senkrecht auf den Rücken wirkende Kraft P werden diese Lasten im Gleichgewichte gehalten?

Auflösung. Nach Gl. 80) ist:

$$P = Q \cdot \frac{AB}{AC} = 500 \cdot \frac{4}{32} = 62{,}5 \text{ kg}$$

§ 15.

Die Reibungswiderstände.

Nach dem Gesetze der Trägheit (§ 4) S. 11 würde ein in gleichförmig geradliniger Bewegung begriffener Körper seine Bewegung ohne weitere Einwirkung von Kräften unverändert fortsetzen; die Erfahrung lehrt jedoch, daß dies in Wirklichkeit nicht der Fall ist, daß vielmehr die Geschwindigkeit des Körpers sich nach und nach verlangsamt und schließlich die Größe Null erreicht. Diese Erscheinung findet ihren Grund in dem Vorhandensein von Widerständen, die sich der Bewegung entgegensetzen und überwunden werden müssen.

Die Widerstände sind wesentlich zweierlei Art, nämlich:

a) Widerstand des Mediums oder Mittels, d. h. der tropfbaren oder gasförmigen Flüssigkeit, in welcher sich der Körper bewegt.

b) Der Reibungswiderstand, welcher allemal entsteht, wenn ein Körper sich auf einem anderen fortbewegt. Da nämlich die Oberflächen der Körper auch bei der sorgfältigsten Bearbeitung niemals vollkommen glatt sind, so sinken, wenn die Körper nur den geringsten Druck gegeneinander ausüben, die Erhöhungen der einen in die Vertiefungen der anderen Oberfläche ein, und die beiderseits vorspringenden Teilchen müssen bei der Bewegung des einen Körpers auf dem anderen entweder losgerissen oder verschoben werden.

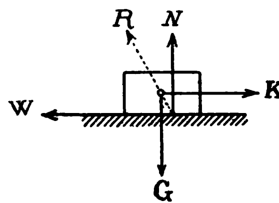
Man unterscheidet gleitende Reibung, zu welcher auch als besondere Art die Zapfenreibung zu rechnen ist, und die rollende Reibung. Die Ketten- und Seilbiegungs-Widerstände sind ebenfalls auf die Reibung zurückzuführen, da bei der Kette der Biegungswiderstand durch die Reibung der einzelnen Kettenglieder, beim Seil durch die Reibung der einzelnen Litzen oder Drähte aneinander erzeugt wird.

Der Widerstand des Mittels wird in Abschnitt VII seine Erledigung finden.

1. Gleitende Reibung.

Bewegt sich ein Körper auf einer Unterlage, so tritt stets die Reibung zwischen den Berührungsflächen als eine Kraft auf, welche der Bewegung entgegengesetzt gerichtet ist, und zu deren Ueberwindung eine andere Kraft in der Bewegungsrichtung thätig sein muß, wenn die Geschwindigkeit des Körpers unverändert erhalten werden soll.

Fig. 112.



Bei einer horizontalen Unterlage ist der dem Gewichte G des Körpers gleiche Gegendruck N vertikal aufwärts gerichtet. Um daher den Körper im Gleichgewichte zu halten, ist zur Ueberwindung des Reibungswiderstandes W noch eine besondere Horizontalkraft K erforderlich (Fig. 112), die um so größer sein muß, je größer W ist. Erfahrungsgemäß ist der Reibungswiderstand W proportional dem Normaldruck N.

$$\mathbf{W = fN} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 84)$$

$f = \frac{W}{N}$ heißt der Reibungskoeffizient und Gl. 84) lautet danach in Worten:

Reibungswiderstand = Reibungskoeffizient × Normaldruck.

Der Reibungskoeffizient ist abhängig:

a) Vom Materiale der aufeinander gleitenden Körper. Je härter das Material, um so kleiner ist im allgemeinen die Reibung. Dabei zeigt es sich, daß zwischen ungleichartigen Körpern die Reibung kleiner ist, als (unter gleichen Umständen) zwischen gleichartigen. So z. B. ist die Reibung zwischen Eis und Stahl kleiner als zwischen Eis und Eis.

b) **Von der Beschaffenheit der Oberflächen.** Je glatter die Oberflächen der Körper bearbeitet und je sorgfältiger diese geschmiert sind, desto kleiner ist der Reibungskoeffizient.

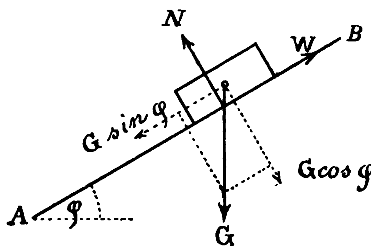
c) **Von der Geschwindigkeit des Gleitens.** Je kleiner die Geschwindigkeit, desto größer ist der Reibungskoeffizient f. Bei der Geschwindigkeit Null, d. h. beim Uebergange aus Ruhe in Bewegung oder umgekehrt, erreicht f seinen größten Wert und wird dann **der Reibungskoeffizient der Ruhe** genannt.

Der Reibungskoeffizient läßt sich mittels einer schiefen Ebene A B (Fig. 113) bestimmen, deren Neigungswinkel φ gegen die Horizontale eine solche Größe hat, daß ein auf die Ebene gebrachter Körper sich mit unveränderter Geschwindigkeit abwärts bewegt. Zerlegt man das Gewicht G des Körpers in die Komponenten G sin φ ($\parallel$ A B) und G cos φ ($\perp$ A B), so wird die letztere aufgehoben durch den normalen Gegendruck N.

$$N = G \cos \varphi$$

Die Komponente G sin φ würde für sich allein eine beschleunigte Abwärtsbewegung des Körpers erzeugen; dieser Bewegung wirkt aber der Reibungswiderstand

Fig. 113.



$$W = fN = fG \cos \varphi$$

entgegen und für den Fall des Gleichgewichtes erhält man die Bedingung:

$$fG \cos \varphi = G \sin \varphi$$

oder:

$$\mathbf{f = tg\,\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad 85)$$

Den Winkel φ nennt man den **Reibungswinkel**. Nach Gl. 85) ist also der **Reibungskoeffizient gleich der Tangente des Reibungswinkels.**

Der Effekt E, welchen die Reibung aufzehrt, wird gefunden, wenn man den Reibungswiderstand mit der Geschwindigkeit v der gleitenden Fläche multipliziert. Daher ist:

$$\mathbf{E = fNv = Wv} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 86)$$

2. Zapfenreibung.

Bei der Drehung eines durch den Druck P belasteten cylindrischen Tragzapfens in seinem Lager entsteht am Zapfenumfange ein der Drehbewegung entgegengesetzt gerichteter Reibungswiderstand von der Größe:

$$\mathbf{W = fP} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 87)$$

Das Moment desselben (Fig. 114) ist:

$$\mathfrak{M} = \mathbf{fPR} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 88)$$

zu dessen Ueberwindung ein entgegengesetzt drehendes Kraftmoment K l erforderlich ist.

Bedeutet v die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens, so ist nach Gl. 17) S. 21 die durch Zapfenreibung während einer Sekunde verbrauchte Arbeit oder der Effekt:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Wv} = \mathbf{fPv} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 89)$$

Für den stehenden Zapfen (Spurzapfen), bei welchem der Zapfendruck P in der Richtung der Achse wirkt, liegt, wenn die Stützfläche eine Ringfläche bildet (Fig. 115), das Reibungsmoment zwischen den Grenzwerten fPR und fPr und hat für gut eingelaufene Zapfen den Wert:

$$\mathfrak{M} = \mathbf{fP}\,\frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 90)$$

Fig. 114.

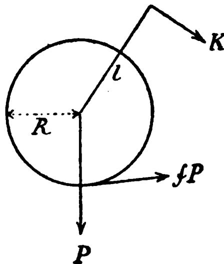
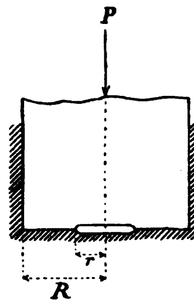


Fig. 115.



Für r = 0, wenn also die Stützfläche eine volle Kreisfläche bildet, ist:

$$\mathfrak{M} = \mathbf{fP}\,\frac{\mathbf{R}}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 91)$$

also nur halb so groß als beim Tragzapfen desselben Radius, bei welchem der Druck P senkrecht zur Achse gerichtet ist.

Die Zapfenreibung kann benutzt werden, um mittels einer geeigneten Vorrichtung den Effekt einer Maschine zu messen. Eine solche Vorrichtung, Bremsdynamometer oder Prony'scher Zaum, ist in Fig. 116 dargestellt.

Auf die Welle A ist eine aus zwei kreisförmig ausgeschnittenen Backen bestehende Klemmvorrichtung gesetzt. Mit der einen Backe fest verbunden ist der Hebel B, an dessen Ende C eine Wagschale zur Aufnahme von Gewichten angebracht ist.

Die Anwendung des Zaumes erfordert, daß die Maschinenwelle A zuerst von der Arbeitsmaschine losgekuppelt wird, darauf wird ihr der Zaum

angelegt. Werden dann die Bremsbacken durch Anziehen der Schrauben E fest auf die Welle gepreßt, so würde diese den unbelasteten Hebel B im Kreise herumführen; durch Aufsetzen eines Gewichtes Q auf die Wagschale läßt es sich aber erreichen, daß der Hebel in der Schwebe bleibt. Es ist dann das Moment der Last Q gleich dem Momente des am Umfang der Welle wirkenden Reibungswiderstandes W.

$$W r = Q l \quad \text{oder} \quad W = Q \frac{l}{r}$$

Angenommen nun, man hätte die Schrauben gerade so fest angezogen, daß die Welle dieselbe Anzahl Umdrehungen macht, als vorher mit angehängter Arbeitsmaschine, so verzehrt offenbar die Reibung des Bremszaumes dieselbe Arbeit, wie vorher von der Welle A an die Arbeitsmaschine abgegeben wurde,

Fig. 116.

folglich ist, wenn die einer bestimmten Umdrehungszahl n entsprechende Umfangsgeschwindigkeit der Welle mit v bezeichnet wird:

$$\mathbf{E} = \mathbf{W v} = \mathbf{Q} \frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}} \mathbf{v} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 92)$$

Zu bemerken ist noch, daß, indem man die Welle mittels des Prony'schen Zaumes auf verschiedene Umdrehungszahlen bremst, sich leicht ermitteln läßt, bei welcher Umdrehungszahl die Maschine die größte Leistungsfähigkeit entwickelt.

3. Rollende Reibung oder Wälzungswiderstand.

Die rollende Reibung tritt auf, wenn ein cylindrischer Körper auf einer Fläche fortrollt. Da kein Material absolut fest und hart ist, so preßt sich dasselbe an der Berührungsstelle zusammen, so daß in Wirklichkeit eine Berührungsfläche von der Breite s entsteht. Um den Körper gleichmäßig fortzurollen, dazu bedarf es einer gewissen Kraft; die Zusammenpressung des Materials hat also dieselbe Wirkung, als ob ein im Schwerpunkte angreifender Widerstand W_r, welcher der Bewegung entgegenwirkt, zu überwinden wäre (Fig. 117).

Ist α derjenige Neigungswinkel einer schiefen Ebene, auf welcher der Körper gleichförmig hinabrollt, so ist nach Fig. 118:

$$\mathbf{W_r} = \mathbf{G} \sin \alpha = \mathbf{G} \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{R}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 93)$$

Die Größe s kann annähernd als konstant betrachtet werden.

Fig. 117.

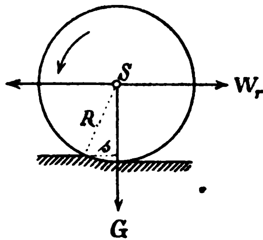
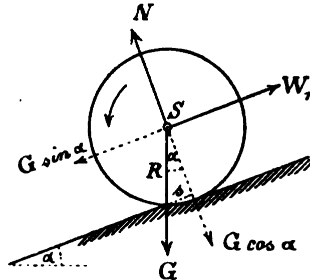


Fig. 118.



Für Eisen auf Eisen, sowie für Hartholz auf Hartholz ist im Mittel:

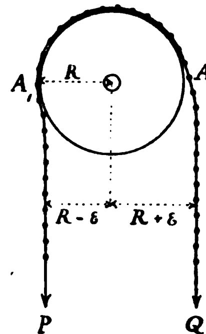
$$s = 0{,}05 \text{ cm}$$

für Stein auf Stein:

$$s = 0{,}15 \text{ cm}$$

Nach Gl. 93) ist der Wälzungswiderstand direkt proportional dem Druck und umgekehrt proportional dem Radius des rollenden Cylinders oder Rades.

Fig. 119.



4. Ketten- und Seil-Biegungswiderstand.

Dieser Widerstand tritt immer da auf, wo eine Kette oder ein Seil auf eine Rolle aufgewickelt oder davon abgewickelt wird. Bei der in Fig. 119 dargestellten Kette entsteht, wenn die Rolle durch die vertikal abwärts wirkende Zugkraft P gleichförmig gedreht und die Last Q dabei gehoben wird, an den Stellen A und A_1, wo die Kette aus der geraden in die gekrümmte Form und umgekehrt übergeht, eine Reibung zwischen den einzelnen Kettengliedern. Diese wirkt der Krümmungsveränderung der Kette als Widerstand entgegen und hat zur Folge, daß die Kette sich an der Aufwickelungsstelle A nicht sofort genau nach dem Rollenradius krümmt, an der Abwickelungsstelle A_1 sich nicht sogleich völlig gerade streckt, wodurch der Hebelarm der Last um ein gewisses Maß ε größer, der der Kraft um ebensoviel kleiner wird als der Rollenhalbmesser R.

Die Gleichgewichtsbedingung ist danach:

$$P (R - \varepsilon) = Q (R + \varepsilon)$$

woraus folgt, daß die Kraft P immer größer als die Last Q sein muß.

Die Hebelarme der Kraft und Last werden in ähnlicher Weise auch bei Seilen durch den Biegungswiderstand beeinflußt, welchen die Reibung zwischen den einzelnen Litzen oder Drähten erzeugt.

Man berücksichtigt den Ketten- bezw. Seil-Biegungswiderstand am einfachsten dadurch, daß man annimmt, Kraft und Last wirken an demselben Hebelarme R, statt der wirklichen Last Q sei aber eine um den Biegungswiderstand vermehrte Last durch die Kraft P zu heben. Bezeichnet also q_1 denjenigen Betrag, um welchen die Zugkraft P größer sein muß als diejenige Zugkraft, welche ohne Vorhandensein des Biegungswiderstandes die Last Q im Gleichgewicht halten könnte, so ist zu setzen:

$$\mathbf{P = Q + q_1} \quad \text{94)}$$

Für Ketten ist annähernd:

$$\mathbf{q_1 = f \frac{\delta}{R} Q} \quad \text{95)}$$

wobei δ den Durchmesser des Ketteneisens, f den Reibungskoeffizient (im Mittel f = 0,15) bedeutet.

Für Seile hat sich, wenn die Seildicke mit δ bezeichnet wird, durch Versuche der Mittelwert ergeben:

$$\mathbf{q_1 = 0{,}13 \frac{\delta^2}{R} Q} \quad \text{96)}$$

Aufgabe 65. Der Schieber einer mit 6 Atmosphären arbeitenden Dampfmaschine ist 26 cm lang, 25 cm breit. Welche Kraft ist zur Bewegung desselben erforderlich, wenn der Reibungskoeffizient f = 0,1 angenommen wird?

Auflösung. Da der Druck von 1 Atmosphäre rund = 1 kg pro qcm gesetzt werden kann, so beträgt der ganze Druck, mit welchem der Schieber auf die Gleitfläche gepreßt wird:

$$N = 6 \,.\, 26 \,.\, 25 = 3900 \text{ kg}$$

folglich ist nach Gl. 84) S. 87:

$$W = 0{,}1 \,.\, 3900 = 390 \text{ kg}$$

Aufgabe 66. Wie groß ist die Arbeit, welche der Schieber der vorigen Aufgabe aufzehrt, wenn der Schieberhub 9 cm beträgt und die Maschine 50 Umdrehungen pro min macht?

Auflösung. Während einer Umdrehung der Maschine führt der Schieber einen Vor- und Rückgang aus, legt also den Weg: 2 . 9 = 18 cm zurück. Der Weg in 1 sec oder die Geschwindigkeit ist daher:

$$v = \frac{50 \,.\, 18}{60} = 15 \text{ cm} = 0{,}15 \text{ m}$$

daher nach Gl. 86) S. 88:

$$E = 390 \,.\, 0{,}15 = 58{,}5 \text{ mkg}$$

oder in Pferdekräften ausgedrückt:

$$N = \frac{58,5}{75} = 0,78$$

Aufgabe 67. Welche Arbeit geht bei einem Wasserrade durch Zapfenreibung verloren, wenn das Gewicht des Rades samt Wasserfüllung 18000 kg beträgt, der Radius der Zapfen r = 8 cm ist und das Rad n = 8 Umdrehungen pro min macht? (f = 0,08).

Auflösung. Für die Berechnung der Zapfenreibung ist es gleichgültig, wie sich der Druck auf die beiden Zapfen verteilt; man kann annehmen, daß ein Zapfen die ganze Last zu tragen hätte.

Nach Gl. 87) S. 88 ist dann:

$$W = 0,08 \,.\, 18000 = 1440 \text{ kg}$$

Die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens ist:

$$v = \frac{2 r \pi n}{60 \,.\, 100} = \frac{2 \,.\, 8 \,.\, 3,14 \,.\, 8}{60 \,.\, 100} = \backsim 0,07 \text{ m}$$

folglich nach Gl. 89) S. 89:

$$E = 1440 \,.\, 0,07 = 100,8 \text{ mkg}$$

oder:

$$N = \frac{100,8}{75} = \backsim 1^1/_3 \text{ Pferdekraft}$$

Aufgabe 68. Ein stehender massiver Zapfen von 12 cm Durchmesser ist in der Achsenrichtung mit P = 7200 kg belastet. Welche Kraft K ist an einem Hebelarme von l = 60 cm Länge erforderlich, um die Zapfenreibung zu überwinden? (f = 0,07).

Auflösung. Nach Gl. 91) S. 89 ist:

$$\mathfrak{M} = 0,07 \,.\, 7200 \,.\, \frac{6}{2} = 1512 \text{ cmkg}$$

daher:

$$K = \frac{\mathfrak{M}}{l} = \frac{1512}{60} = 26,2 \text{ kg}$$

Aufgabe 69. Eine 14 cm starke Welle wurde mittels eines Pronyschen Zaumes so gebremst, daß sie 80 Umdrehungen pro min machte. Das Gewicht in der Wagschale nebst dem auf den Punkt C (Fig. 116) reduzierten Gewichte des 2 m langen Hebels betrug, um diesen in horizontaler Lage zu halten, 450 kg. Wie hoch berechnet sich danach der Effekt der Welle?

Auflösung. Die Umfangsgeschwindigkeit der Welle ist:

$$v = \frac{2 \,.\, 7 \,.\, 3,14 \,.\, 80}{60 \,.\, 100} = 0,586 \text{ m}$$

daher nach Gl. 92) S. 90:

$$E = 450 \,.\, \frac{200}{7} \,.\, 0,586 = 7534 \text{ mkg}$$

oder:

$$N = \frac{7534}{75} = \backsim 100 \text{ Pferdekräfte}$$

Aufgabe 70. Bei einem Eisenbahnwagen sei der Radhalbmesser R = 50 cm, der Halbmesser der Achsschenkel (Zapfen) r = 4,5 cm, das Totalgewicht des Wagens

inkl. Belastung: $P = 15\,000$ kg, das Gewicht der Sätze (Achsen und Räder): $p = 2000$ kg. Wie groß ist die rollende Reibung, wie groß die Zapfenreibung (bei $f = 0{,}02$), und welche Zugkraft Z ist zur Ueberwindung der Reibungswiderstände erforderlich?

Auflösung. Nach Gl. 93) S. 91 ist die rollende Reibung:

$$W_r = P \frac{s}{R} = 15000 \,.\, \frac{0{,}05}{50} = 15 \text{ kg}$$

Auf die Achsschenkel kommt die Last:

$$P - p = 15000 - 2000 = 13000 \text{ kg}$$

daher die Zapfenreibung nach Gl. 87) S. 88:

$$W = f\,(P - p) = 0{,}02 \,.\, 13000 = 260 \text{ kg}$$

oder auf den Umfang der Räder reduziert:

$$W \frac{r}{R} = 260 \,.\, \frac{4{,}5}{50} = 23{,}4 \text{ kg}$$

Die zur Ueberwindung der Reibungswiderstände erforderliche Zugkraft ist daher:

$$Z = 15 + 23{,}4 = 38{,}4 \text{ kg}$$

oder:

$$\frac{38{,}4}{15000} = \frac{1}{390} \text{ vom Totalgewicht des Wagens.}$$

Aufgabe 71. An einem über eine feste Rolle geführten Seile hängt an einem Ende die Last Q, am anderen Ende greift die vertikal abwärts wirkende Kraft P an. Wenn die Seildicke $\delta = 3$ cm, der Durchmesser des Rollenzapfens $d = 3$ cm und der Rollenhalbmesser $R = 12$ cm angenommen wird, wie groß muß dann P im Verhältnis zu Q sein?

Auflösung. Nach Gl. 96) S. 92 ist der Seilbiegungswiderstand:

$$q_1 = 0{,}13 \,.\, \frac{3^2}{12} \,.\, Q = 0{,}098 \,.\, Q$$

Auf die Zapfen kommt die Last $P + Q$, wofür genügend genau $2Q$ gesetzt werden kann. Danach ist dann die Reibung am Umfange des Rollenzapfens ($f = 0{,}08$ gesetzt):

$$W = 0{,}08 \,.\, 2Q = 0{,}16 \,.\, Q$$

oder auf den Rollenumfang reduziert:

$$q_2 = W \,.\, \frac{1{,}5}{12} = 0{,}16\, Q \,.\, \frac{1{,}5}{12} = 0{,}021\, Q$$

Da nun die Zugkraft P um den Betrag der Widerstände größer sein muß als die Last Q, um diese im Gleichgewichte zu halten, so wird:

$$P = Q + q_1 + q_2 = Q\,(1 + 0{,}098 + 0{,}021) = 1{,}119 \,.\, Q$$

Die Zahl, mit welcher die Last zu multiplizieren ist, um die Größe der erforderlichen Zugkraft zu erhalten, wird der Widerstandskoeffizient genannt und mit μ bezeichnet. Allgemein ist danach bei einer Rolle:

$$\mathbf{P = \mu Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 97)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für Seile ist durchschnittlich:} & \mu = \mathbf{1{,}12} \\ \text{für Ketten „ \quad „ \quad :} & \mu = \mathbf{1{,}05} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 98)$$

zu setzen; dabei ist der Halbmesser der Seilrolle, vermehrt um die halbe Seildicke zu $4\,\delta$, der Halbmesser der Kettenrolle, vermehrt um die halbe Dicke des Ketteneisens δ zu $10{,}5\,\delta$ angenommen.

§ 16.

Die einfachen Maschinen mit Berücksichtigung der Reibungen.

1. Der Hebel.

Für den zweiarmigen Hebel (Fig. 85) S. 65 ergibt sich für die zum gleichförmigen Heben der Last Q erforderliche Kraft P, wenn der Halbmesser des Drehzapfens mit ϱ bezeichnet wird, die Bedingung:

$$P\,r = Q\,l + G\,a + (P + G + Q)\,f\varrho$$

daraus:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{Q\,l + G\,a + (G + Q)\,f\varrho}}{\mathbf{r - f\varrho}} \quad \ldots\ldots \quad 99)$$

In gleicher Weise erhält man für die Kraft P_1, welche ein Sinken der Last Q verhindert, den Wert:

$$\mathbf{P_1} = \frac{\mathbf{Q\,l + G\,a - (G + Q)\,f\varrho}}{\mathbf{r + f\varrho}} \quad \ldots\ldots \quad 100)$$

2. Das Wellrad (Fig. 96) S. 72.

Die Kraft P (die, wenn z. B. das Rad mit dem Radius R als Zahnrad gedacht wird, in dem Zahndrucke besteht) hat beim Heben der Last Q den Zapfenreibungs- und Seilbiegungswiderstand zu überwinden. Da hier nur ein Aufwickeln des Seiles auf die Welle (oder die auf der Welle befestigte Trommel), aber kein Abwickeln stattfindet, so ist für den Seilbiegungswiderstand nur die Hälfte des in Gl. 96) S. 92 angegebenen Wertes in Rechnung zu stellen. Bedeutet G das Eigengewicht des Wellrades, δ die Seildicke, ϱ den Zapfenradius, so lautet für den Fall, daß $P \parallel Q$ ist, die Gleichgewichtsbedingung:

$$P\,R = Q\,w + (P + G + Q)\,f\varrho + \frac{1}{2}\left(0{,}13\,\frac{\delta^2}{w}\,Q\right)w$$

daraus:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{Q\,w + (G + Q)\,f\varrho + \frac{1}{2}\,.\,0{,}13\,\delta^2\,Q}}{\mathbf{R - f\varrho}} \quad \ldots \quad 101)$$

Die Kraft P_1, welche ein Sinken der Last verhindert, muß die Größe haben:

$$\mathbf{P_1} = \frac{\mathbf{Q\,w - (G + Q)\,f\varrho - \frac{1}{2}\,.\,0{,}13\,\delta^2\,Q}}{\mathbf{R + f\varrho}} \quad \ldots \quad 102)$$

3. Die Rolle.

Nach Gl. 97) S. 94 ist für eine Rolle: $P = \mu Q$, wo für den Widerstandskoeffizienten μ die in den Gleichungen 98) angegebenen Werte einzusetzen sind.

Für die lose Rolle (Fig. 99) S. 76 muß die am freien Seilende angreifende Kraft P danach μ mal größer sein als die Spannkraft des festen (linken) Seilendes, letztere ist daher $= \frac{P}{\mu}$. Daraus folgt die Bedingung:

$$P + \frac{P}{\mu} = Q$$

oder:

$$P = \frac{Q}{1 + \frac{1}{\mu}}$$

Für Fig. 100 ergibt sich in gleicher Weise:

$$\frac{P}{\mu} + \frac{P}{\mu^2} = Q$$

oder:

$$P = \frac{Q}{\frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)}$$

Bei zwei losen und einer festen Rolle würde man erhalten:

$$P = \frac{Q}{\frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^2}$$

Allgemein ist bei einem Potenzenzuge mit n losen und einer festen Rolle:

$$P = \frac{Q}{\frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 103)$$

Nach Gl. 67 S. 77 ist ohne Berücksichtigung der Widerstände:

$$P = \frac{Q}{2^n}$$

daher das Güterverhältnis:

$$\eta = \frac{P_{\text{ohne Widerst.}}}{P_{\text{mit Widerst.}}} = \frac{\frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^n}{2^n} \quad \ldots\ldots \quad 104)$$

Bei dem gewöhnlichen Flaschenzuge (Fig. 102) S. 78 sind die in den Seilen 1, 2, 3, 4 auftretenden Spannkräfte: $\frac{P}{\mu}, \frac{P}{\mu^2}, \frac{P}{\mu^3}, \frac{P}{\mu^4}$. Da nun die Last Q gleich deren Summe sein muß, so hat man:

$$P\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^3} + \frac{1}{\mu^4}\right) = Q$$

oder:

$$P \frac{1}{\mu^4}\left(1 + \mu + \mu^2 + \mu^3\right) = Q$$

Setzt man:

$$1 + \mu + \mu^2 + \mu^3 = s$$

so wird:

$$\mu + \mu^2 + \mu^3 + \mu^4 = \mu s$$

Durch Subtraktion der oberen Gleichung von der letzten erhält man:

$$\mu^4 - 1 = (\mu - 1) s$$

oder:

$$s = \frac{\mu^4 - 1}{\mu - 1}$$

Nach Einsetzung dieses Wertes für die Reihe $1 + \mu + \mu^2 + \mu^3$ ergibt sich dann:

$$P \frac{1}{\mu^4}\left(\frac{\mu^4 - 1}{\mu - 1}\right) = Q$$

folglich:

$$P = Q \frac{\mu^5 - \mu^4}{\mu^4 - 1}$$

Allgemein ist für n lose Rollen:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \frac{\mu^{2n+1} - \mu^{2n}}{\mu^{2n} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 105)$$

Da nach Gl. 69) S. 77 ohne Berücksichtigung der Widerstände:

$$P = \frac{Q}{2n}$$

ist, so stellt sich das Güteverhältnis heraus zu:

$$\eta = \frac{\mu^{2n} - 1}{2n\,(\mu^{2n+1} - \mu^{2n})} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 106)$$

Nach den Gleichungen 103) bis 106) ist unter Zugrundelegung des Koeffizienten $\mu = 1,12$ (für Seile) folgende Tabelle berechnet:

	Potenzenzug		Flaschenzug	
	P =	η =	P =	η =
1 lose Rolle . . .	0,592 Q	0,845	0,594 Q	0,842
2 „ Rollen . . .	0,313 Q	0,80	0,329 Q	0,76
3 „ „ . . .	0,165 Q	0,76	0,243 Q	0,69
4 „ „ . . .	0,087 Q	0,72	0,201 Q	0,62

Beim Differentialflaschenzuge (Fig. 103 S. 78) ergibt sich mit Berücksichtigung der Reibungswiderstände die Zugkraft P zu:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \frac{\mu^2 - \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}}}{1 + \mu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 107)$$

und das Güteverhältnis:

$$\eta = \frac{(1+\mu)\left(1-\frac{r}{R}\right)}{2\left(\mu^2-\frac{r}{R}\right)} \quad \ldots\ldots \quad 108)$$

Für $\mu = 1{,}05$ und $\frac{r}{R} = \frac{11}{12}$ wird: $\eta = 0{,}46$.

4. Die schiefe Ebene.

Wird ein Körper auf einer schiefen Ebene durch eine der Bahn parallel gerichtete Kraft P gleichförmig bergan gezogen, so hat diese Kraft außer der bergab wirkenden Seitenkraft $G \sin \alpha$ des Körpergewichtes G noch die Reibung

$$W = fN = fG \cos \alpha$$

als Widerstand zu überwinden. Nach Fig. 120 erhält man daher:

$$P = G \sin \alpha + fG \cos \alpha$$

Fig. 120.

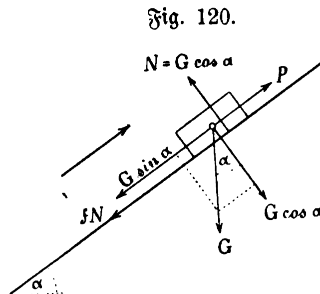
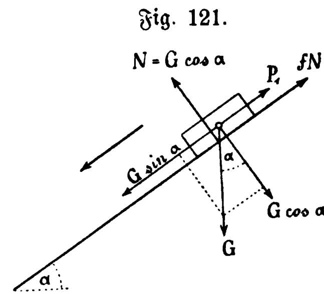


Fig. 121.



oder, indem man nach Gl. 85) S. 88 für f den Wert $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ einsetzt:

$$P = G\left(\sin \alpha + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \alpha\right)$$

$$P = G\left(\frac{\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi}{\cos \varphi}\right)$$

$$P = G \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}$$

Führt der Körper eine gleichförmige Abwärtsbewegung aus, so wirkt der Reibungswiderstand in der Richtung der Kraft P_1 (Fig. 121), folglich ist dann:

$$P_1 = G \sin \alpha - fG \cos \alpha$$

oder:

$$P_1 = G \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}$$

Die obige Gleichung:

$$P = G \sin \alpha + fG \cos \alpha$$

läßt sich auch in der Form schreiben:

$$P = G \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha + f)$$

wofür bei sehr kleinem Winkel α genügend genau gesetzt werden kann:

$$P = G\,(\mathrm{tg}\,\alpha + f)$$

Ist die Kraft P horizontal gerichtet (Fig. 122), so erhält man als Bedingung der gleichförmigen Aufwärtsbewegung:

$$P \cos\alpha = G \sin\alpha + f N = G \sin\alpha + f\,(P \sin\alpha + G \cos\alpha)$$

oder:

$$P = G\,\frac{(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{\cos\alpha - f\sin\alpha}$$

Fig. 122.

Fig. 123.

Dividiert man in diesem Ausdruck Zähler und Nenner durch $\cos\alpha$ und setzt (nach Gl. 85 S. 88) für f den Wert $\mathrm{tg}\,\varphi$, so ergibt sich:

$$P = G\,\frac{(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\varphi)}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi}$$

oder:

$$\mathbf{P = G\,tg\,(\alpha + \varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 109)$$

In gleicher Weise erhält man für die gleichförmige Abwärtsbewegung (Fig. 123):

$$\mathbf{P_1 = G\,tg\,(\alpha - \varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 110)$$

Durch eine Horizontalkraft, welche größer als P_1, aber kleiner als P ist, würde ein vorher ruhender Körper auf der schiefen Ebene weder aufwärts noch abwärts in Bewegung gesetzt werden.

5. Die Schraube.

Da die Schraube nach 5. § 14 S. 83 als eine um einen Cylinder gewundene schiefe Ebene betrachtet werden kann, so sind die Gleichungen 109) und 110) auch unmittelbar als Gleichgewichtsbedingungen für eine flachgängige Schraube gültig, wenn darin die zu überwindende Last Q statt G eingesetzt wird. Danach ist:

$$P = Q\,\mathrm{tg}\,(\alpha \pm \varphi)$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit dem mittleren Schraubenhalbmesser ϱ und ersetzt das Moment $P\varrho$ durch ein gleichwertiges Moment $K l$, so erhält man:

$$\mathbf{K l = Q \varrho\,tg\,(\alpha \pm \varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 111)$$

Das Zeichen + gilt dann, wenn der zu überwindende Widerstand Q der gleichförmig fortschreitenden Bewegung der Schraube entgegengesetzt gerichtet

ist; das Zeichen — für den umgekehrten Fall, wo die fortschreitende Bewegung der Schraube in der Richtung von Q erfolgt.

Nach Gl. 79) S. 84 war ohne Berücksichtigung der Reibungen:

$$K l = Q \varrho \operatorname{tg} \alpha$$

folglich ist das Güteverhältnis:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varphi)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 112)$$

Für die scharfgängige Schraube ist:

$$K l = Q \varrho \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm 1{,}13 \operatorname{tg} \varphi}{1 \mp 1{,}13 \, . \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 113)$$

Bei der scharfgängigen Schraube ist die Reibung viel bedeutender als bei der flachgängigen; die scharfgängige Schraube findet daher als Bewegungsmechanismus wenig Anwendung.

6. Der Keil (Fig. 111) S. 85.

Ohne Berücksichtigung der Reibungen ist für $Q \perp AC$ bezw. BC nach Gl. 81) S. 86.

$$P = 2 Q \sin \frac{\alpha}{2}$$

Beim Antreiben des Keiles tritt nun aber an jeder der Seiten ein Reibungswiderstand fQ auf, welcher der Bewegung entgegengesetzt gerichtet ist. Die Resultierende P aus Q und fQ weicht um den Reibungswinkel φ von der Normalen zu AC bezw. BC ab.

Man erhält daher die zum Eintreiben des Keiles erforderliche Kraft P, wenn man in Gl. 81) statt $\frac{\alpha}{2}$ den Wert $\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right)$ einsetzt. Danach ist mit Berücksichtigung der Reibungen:

$$P = 2 Q \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 114)$$

Nach Aufhören der Kraft P hat der Keil das Bestreben zurückzugehen. Dann wirkt die Reibung nach entgegengesetzter Richtung und es ergibt sich die Kraft P_1, welche erforderlich ist, um ein Zurückgehen des Keiles zu verhindern, zu:

$$P_1 = 2 Q \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 115)$$

Ist $\varphi > \frac{\alpha}{2}$, so wird P_1 negativ, d. h. der Keil wird nicht selbstthätig zurückgehen und es muß eine Kraft:

$$P_2 = - P_1 = 2 Q \sin \left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) \quad . \; . \; . \; . \quad 116)$$

entgegengesetzt der Kraft P thätig sein, um den Keil loszutreiben.

Aufgabe 72. Bei dem in Aufgabe 47 S. 70 besprochenen Hebel sei der Zapfendurchmesser $\rho = 0{,}6$ cm. Es sollen P und P_1 mit Berücksichtigung der Zapfenreibung ($f = 0{,}1$) berechnet werden.

Auflösung. Nach Gl. 99) S. 95 ist:

$$P = \frac{20 \,.\, 100 + 6 \,.\, 10 + (6 + 20) \,.\, 0{,}1 \,.\, 0{,}6}{40 - 0{,}1 \,.\, 0{,}6} = 51{,}62 \text{ kg}$$

nach Gl. 100):

$$P_1 = \frac{20 \,.\, 100 + 6 \,.\, 10 - (6 + 20) \,.\, 0{,}1 \,.\, 0{,}6}{40 + 0{,}1 \,.\, 0{,}6} = 51{,}38 \text{ kg}$$

Aufgabe 73. Wie groß ist P und P_1 bei dem in Aufgabe 48 S. 70 gegebenen Hebel, wenn außer den dort genannten Größen noch $\rho = 1$ cm und $f = 0{,}1$ angenommen wird?

Auflösung.

$$P = 28{,}21 \text{ kg}; \qquad P_1 = 27{,}79 \text{ kg}$$

Aufgabe 74. Wenn in Aufgabe 52 S. 73 der Seildurchmesser $\delta = 2{,}8$ cm, der Zapfenhalbmesser $\rho = 1{,}8$ cm und das Gewicht des Wellrades $G = 200$ kg angenommen wird, wie groß stellt sich dann bei $f = 0{,}1$ die zum Heben der Last erforderliche Kraft P heraus, und welche Kraft P_1 würde ein Niedersinken der Last verhindern?

Auflösung. Nach den Gleichungen 101) und 102) S. 95 wird:

$$P = 105{,}3 \text{ kg}; \qquad P_1 = 94{,}7 \text{ kg}$$

Aufgabe 75. Auf eine Schraube, deren mittlerer Radius $\rho = 2{,}4$ cm und deren Ganghöhe $h = 1$ cm beträgt, ist ein 40 cm langer einarmiger Hebel gesetzt; am Ende desselben greift eine Kraft $K = 32$ kg an. Welche in der Achsenrichtung der Schraube wirkende Last Q kann damit gehoben werden?

Auflösung. Aus:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2 \rho \pi} = \frac{1}{15{,}08} = 0{,}0663$$

ergibt sich:

$$\alpha = 3^{\circ} 47',5$$

Wird $f = \operatorname{tg} \varphi = 0{,}08$, also $\varphi = 4^{\circ} 34',5$ gesetzt, so wird

$$\alpha + \varphi = 3^{\circ} 47',5 \pm 4^{\circ} 34',5 = 8^{\circ} 22'$$

$$\operatorname{tg} (\alpha + \varphi) = \operatorname{tg} (8^{\circ} 22') = 0{,}147$$

und nach Gl. 111) S. 99:

$$32 \,.\, 40 = Q \,.\, 2{,}4 \,.\, \operatorname{tg} (8^{\circ} 22')$$

daraus:

$$Q = \frac{32 \,.\, 40}{2{,}4 \,.\, 0{,}147} = 3628 \text{ kg}$$

Ohne Reibung würde nach Gl. 79) S. 84 sein:

$$32 \,.\, 40 = Q \,.\, 2{,}4 \,.\, \operatorname{tg} \alpha$$

oder:

$$Q = \frac{32 \,.\, 40}{2{,}4 \,.\, 0{,}0663} = 8044 \text{ kg}$$

Das Güteverhältnis ist demnach:

$$\eta = \frac{3628}{8044} = 0{,}45$$

Aufgabe 76. Wenn bei dem Keile in Aufgabe 64 S. 86 die Reibung berücksichtigt und der Reibungskoefficient $f = 0{,}15$ angenommen wird, wie groß stellt sich dann die Kraft P heraus?

Auflösung. Aus:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{32} = 0{,}0625 \text{ folgt: } \frac{\alpha}{2} = 3^0 35'$$

ferner aus:

$$f = tg\,\varphi = 0{,}15 \qquad \text{„} \qquad \varphi = 8^0 30'$$

folgt:

$$\frac{\alpha}{2} + \varphi = 3^0 35' + 8^0 30' = 12^0 5'$$

$$\varphi - \frac{\alpha}{2} = 8^0 30' - 3^0 35' = 4^0 55'$$

Nach Gl. 114) S. 100 wird dann:

$$P = 2 \,.\, 500 \,.\, \sin(12^0 5') = 2 \,.\, 500 \,.\, 0{,}2093 = 209{,}3 \text{ kg}$$

Zum Zurücktreiben des Keiles ist nach Gl. 116) die Kraft:

$$P_2 = 2 \,.\, 500 \,.\, \sin(4^0 55') = 2 \,.\, 500 \,.\, 0{,}0857 = 85{,}7 \text{ kg}$$

erforderlich.

Abschnitt III.

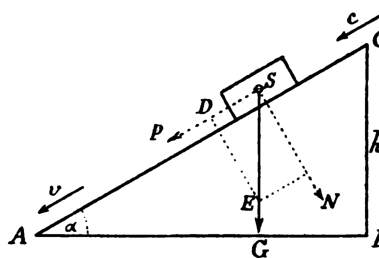
Die Lehre von der Bewegung fester Körper mit Rücksicht auf ihre Ursachen (Dynamik fester Körper).

§ 17.

Bewegung auf der schiefen Ebene.

Befindet sich ein Körper von der Masse m auf einer um den Winkel α gegen die Horizontale geneigten Ebene $AC = l$ (Fig. 124), so zerlegt sich das Gewicht desselben $G = m\,g$ in die Komponenten $N \perp AC$ und $P \parallel AC$, von denen die erstere durch den Gegendruck der schiefen Ebene aufgehoben wird, während die letztere dem Körper ohne Berücksichtigung etwaiger Widerstände (Reibungen, Luftwiderstand) eine gleichförmig beschleunigte Abwärtsbewegung erteilt. Die Größe der Beschleunigung ist nach Gl. 13) S. 12:

Fig. 124.



$$p = \frac{P}{m}$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke DES und ABC folgt aber:

$$\frac{SD}{SE} = \frac{BC}{AC} \quad \text{oder} \quad \frac{P}{m\,g} = \frac{h}{l}$$

daher:

$$P = m g \frac{h}{l}$$

Für die Beschleunigung ergibt sich danach der Wert:

$$\mathbf{p = g \frac{h}{l}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 117)$$

Die Beschleunigung auf der schiefen Ebene verhält sich zu der Fallbeschleunigung, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge.

Die senkrecht zu AC gerichtete Komponente N verrichtet die mechanische Arbeit Null. Die während der Bewegung des Körpers von C nach A von der Komponente P verrichtete mechanische Arbeit ist:

$$\mathfrak{A} = P l = m g \frac{h}{l} l = m g h$$

Ebenso groß würde auch die mechanische Arbeit sein, welche von der Kraft $G = m g$ verrichtet wird, wenn der Körper die Höhe h von C nach B frei durchfallen könnte.

Da nach S. 22 § 5 die mechanische Arbeit gleich der Zunahme an lebendiger Kraft ist, so erhält man, wenn die Geschwindigkeiten des Körpers am Anfang und am Ende der Bewegung (in den Punkten C und A) mit c und v bezeichnet werden:

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m c^2}{2} = m g h$$

Daraus ergibt sich die Größe der Endgeschwindigkeit zu:

$$\mathbf{v = \sqrt{c^2 + 2 g h}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 118)$$

Für den Fall, daß die Anfangsgeschwindigkeit $c =$ Null ist, wird:

$$\mathbf{v = \sqrt{2 g h}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 119)$$

Hätte der Körper von C nach B frei herabfallen können, so würde er in B mit derselben Endgeschwindigkeit v angekommen sein.

Aufgabe 77. Ein Eisenbahnwagen bewegt sich mit der Anfangsgeschwindigkeit Null auf einer unter 1 : 80 geneigten Bahnstrecke. Wie groß ist (ohne Berücksichtigung der Widerstände) dessen Beschleunigung p, wie groß der nach 30 sec zurückgelegte Weg, und wie groß die Endgeschwindigkeit v?

Auflösung. Nach Gl. 117) ist:

$$p = 9{,}81 \cdot \frac{1}{80} = 0{,}1226$$

Nach Gl. 12) (S. 6) ist:

$$s = \frac{p t^2}{2} = 0{,}1226 \cdot \frac{30^2}{2} = 55{,}17 \text{ m}$$

Der Endpunkt der Bewegung liegt daher um:

$$h = \frac{55,17}{80} = 0,69 \text{ m}$$

tiefer als der Anfangspunkt, folglich ist nach Gl. 119)

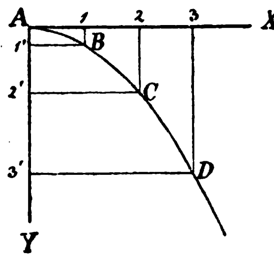
$$v = \sqrt{2 \,.\, 9,81 \,.\, 0,69} = 3,678 \text{ m}$$

§ 18.

Wurfbewegung.

Wird ein Körper von A aus in der horizontalen Richtung A X (Fig. 125) mit der Geschwindigkeit c geworfen, so würde er sich, wenn keine anderen Kräfte auf ihn einwirkten, nach dem Gesetze der Trägheit mit unveränderter Geschwindigkeit in derselben Richtung weiter fortbewegen. Ist also:

Fig. 125.



$$A1 = 12 = 23 = \ldots = c$$

so würde der Körper am Ende der ersten Sekunde im Punkte 1, am Ende der zweiten Sekunde im Punkte 2 u. s. w. ankommen. Vermöge der Schwerkraft wird aber der Körper gleichzeitig mit der Beschleunigung g = 9,81 m vertikal abwärts fallen, und zwar sind (für die Anfangsgeschwindigkeit Null) die durchfallenen Wegeslängen nach der Gl. 12) S. 6:

$$s = g \frac{t^2}{2}$$

zu berechnen. Setzt man hierin für t der Reihe nach die Werte 1, 2, 3 ... ein, so erhält man:

$$A1' = \frac{g}{2} \,.\, 1$$

$$A2' = \frac{g}{2} \,.\, 2^2 = \frac{g}{2} \,.\, 4$$

$$A3' = \frac{g}{2} \,.\, 3^2 = \frac{g}{2} \,.\, 9$$

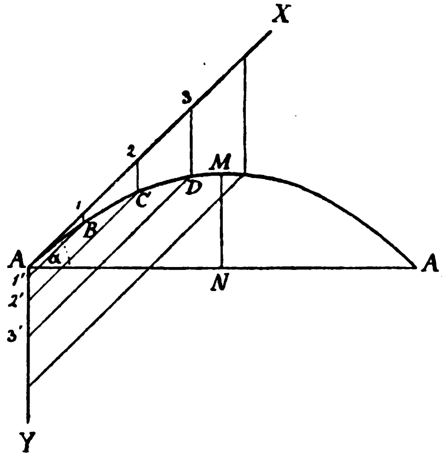
. . . .

Konstruiert man aus den in gleichen Zeiten horizontal und vertikal durchlaufenen Wegeslängen Parallelogramme, so geben die dem Punkte A gegenüberliegenden Eckpunkte derselben die wirkliche Lage des Körpers nach Verlauf der betreffenden Zeiten an. Nach 1, 2, 3 ... Sekunden wird daher der Körper sich in B, C, D ... befinden. Legt man durch die Punkte B, C, D ... eine stetige Kurve, so ist diese die Bahn des geworfenen Körpers (die Wurflinie). Diese Bahn ist eine Parabel, deren Scheitel in A liegt und deren Achse

die Gerade A Y ist. Nach der Parabel krümmt sich z. B. auch ein mit einer gewissen Geschwindigkeit horizontal aus einer Ausflußöffnung austretender Wasserstrahl.

In ähnlicher Weise ergibt sich die Wurflinie A B C D . . . (Fig. 126) eines in der Richtung A X schräg aufwärts geworfenen Körpers als Resul-

Fig. 126.



tierende zweier Bewegungen, von denen die eine in der Richtung A X gleichförmig, die andere in der vertikalen Richtung A Y gleichförmig beschleunigt (mit der Beschleunigung g) ist.

Der Winkel α, den die A X mit der Horizontalen bildet, heißt der Elevationswinkel, die Höhe MN = h (M ist der Scheitel der Parabel) ist die Wurfhöhe, die Horizontale $A A_1 = l$ die Wurfweite.

Zerlegt man die Anfangsgeschwindigkeit c des Körpers nach horizontaler und vertikaler Richtung, so ist:

die Geschwindigkeit in horizontaler Richtung $= c \cos \alpha$

die Geschwindigkeit in vertikaler Richtung $= c \sin \alpha - g t$ (vergl. Gl. 9) S. 6).

Da im höchsten Punkte M der Bahn die Geschwindigkeit in vertikaler Richtung = Null ist, so folgt daraus:

$$t = \frac{c \sin \alpha}{g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 120)$$

Um von M nach dem Punkte A_1 zu gelangen, braucht der Körper dieselbe Zeit t, daher ergibt sich die gesamte Wurfzeit zu:

$$T = \frac{2 c \sin \alpha}{g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 121)$$

Die **Wurfweite** ist:

$$l = c \cos \alpha \, T = c \cos \alpha \, \frac{2 c \sin \alpha}{g}$$

$$\mathbf{l = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 122)$$

Die in der Zeit t erreichte **Wurfhöhe** ist (nach Gl. 8) S. 6)

$$h = c \sin \alpha \, t - \frac{g t^2}{2}$$

und wenn hierin für t der Wert aus Gl. 120) eingesetzt wird:

$$\mathbf{h = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2 g}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 123)$$

Nach Gl. 122) ergibt sich die größte Wurfweite für:

$$\sin 2\alpha = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha = 45^0$$

zu:

$$\mathbf{l_{max} = \frac{c^2}{g}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 124)$$

Bei zwei Elevationswinkeln, von denen der eine ebensoviel über, wie der andere unter 45° ist, wird dieselbe Wurfweite erreicht.

Die obigen Gleichungen dieses Paragraphen sind nur dann vollständig richtig, wenn die Bewegung im luftleeren Raume geschieht. Durch den Einfluß des Luftwiderstandes weicht bei größeren Geschwindigkeiten die wirkliche Wurflinie wesentlich von der parabolisch symmetrischen Form ab.

Aufgabe 78. Eine Granate wird unter einem Elevationswinkel von 30° abgeschossen. Wie groß ist die Wurfzeit, die Wurfweite und die Wurfhöhe, wenn die Anfangsgeschwindigkeit c = 300 m beträgt?

Auflösung.

Für $\alpha = 30^0$ ist $\sin \alpha = 0{,}5$; $\sin 2\alpha = 0{,}866$

folglich nach Gl. 121):

$$T = \frac{2 \, . \, 300 \, . \, 0{,}5}{9{,}81} = 30{,}6 \text{ sec}$$

nach Gl. 122):

$$l = \frac{300^2 \, . \, 0{,}866}{9{,}81} = 7945 \text{ m}$$

nach Gl. 123):

$$h = \frac{300^2 \, . \, 0{,}5^2}{2 \, . \, 9{,}81} = 1147 \text{ m}$$

Bei $\alpha = 45^0$ würde die Maximalwurfweite erreicht, welche nach Gl. 124) die Größe hat:

$$l_{max} = \frac{300^2}{9{,}81} = 9174 \text{ m}$$

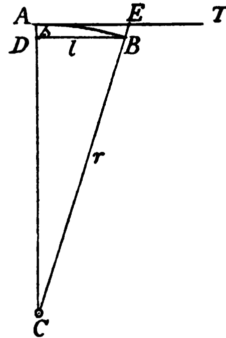
§ 19.

Gleichförmige Kreisbewegung (Centripetalkraft).

Führt ein Körper eine gleichförmige Kreisbewegung aus, so ist die Ablenkung aus der geradlinigen Bewegung die Wirkung einer Kraft, der sogen. Centripetalkraft, welche den Körper stets nach dem Mittelpunkte des Kreises (dem Centrum) hinzieht.

Es sei (Fig. 127) A die augenblickliche Lage des Körpers und AB der von demselben in der unendlich kleinen Zeit t mit der Geschwindigkeit v durchlaufene Kreisbogen. Vermöge der Trägheit hat der Körper das Bestreben, sich von A aus in der Richtung der Tangente AT fortzubewegen, und würde ohne Vorhandensein der Centripetalkraft nach t sec nicht in B, sondern in E ankommen, sich also um das Maß BE von dem Mittelpunkte C des Kreises weiter entfernt haben.

Fig. 127.



Zieht man BD || AT, so stellt AD = s den Weg dar, welchen der Körper in derselben Zeit t unter der **alleinigen** Einwirkung der Centripetalkraft durchlaufen hätte.

Die gleichförmige Kreisbewegung kann also betrachtet werden als Resultierende zweier Bewegungen, von denen die eine gleichförmig und in jedem Punkte des Kreises tangentiell gerichtet ist, die andere (durch die Centripetalkraft bewirkte) gleichförmig beschleunigt und nach dem Mittelpunkte des Kreises gerichtet ist.

Ist v die Geschwindigkeit der Kreisbewegung, so ist der Bogen AB = vt. Da aber t unendlich klein angenommen wurde, so kann man den Bogen AB mit der halben Sehne DB = l vertauschen und man erhält dann:

$$l = vt$$

Bezeichnet man die Beschleunigung, welche dem Körper von der Centripetalkraft erteilt wird, mit p, so ist nach Gl. 12) S. 6:

$$s = \frac{pt^2}{2}$$

Geometrisch ist nach Fig. 127:

$$BD^2 = BC^2 - CD^2$$

oder:

$$l^2 = r^2 - (r - s)^2 = 2rs - s^2$$

Da s im Vergleich zu r sehr klein ist, so kann man genügend genau dafür setzen:

$$l^2 = 2rs$$

und wenn für l und s die oben gefundenen Werte eingesetzt werden:

$$v^2 t^2 = 2r \cdot \frac{p t^2}{2}$$

woraus sich für die Centripetalbeschleunigung p der Wert ergibt:

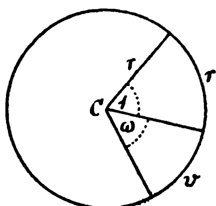
$$p = \frac{v^2}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 125)$$

Für die Centripetalkraft C erhält man danach die Größe:

$$C = \frac{m v^2}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 126)$$

Nach dem Reaktionsgesetze (§ 4 S. 14) hat die Centripetalkraft eine Gegenkraft von gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung, eine Kraft also, die vom Mittelpunkte C der Kreisbewegung radial nach außen wirkt. Diese Kraft heißt die Centrifugalkraft. Sie wirkt nicht auf den Körper selbst, da sich an diesem sonst Centripetal- und Centrifugalkraft im Gleichgewichte halten würden und der Körper dann keine Kreisbewegung ausführen könnte, sondern sich geradlinig fortbewegen müßte; sie wirkt vielmehr auf den Drehpunkt C und sucht diesen aus seiner Lage zu bringen. Ist z. B. der sich kreisförmig bewegende Körper eine Kugel, welche mit dem Drehpunkte durch einen Faden verbunden ist, so äußert sich die Centrifugalkraft in der Spannung des Fadens und wird durch den Faden auf den Drehpunkt C übertragen.

Fig. 128.



Dem Ausdrucke für die Centripetalkraft läßt sich dadurch noch eine andere Form geben, daß man statt der Umfangsgeschwindigkeit die Winkelgeschwindigkeit einführt.

Unter der Winkelgeschwindigkeit versteht man den Winkel, um welchen sich bei der Kreisbewegung der Radius in einer Sekunde dreht.

Nimmt man denjenigen Winkel, dessen Bogen gleich dem Radius ist, als Winkeleinheit ein, so ist nach Fig. 128:

$$\frac{\sphericalangle 1}{360^\circ} = \frac{r}{2 r \pi}$$

oder:

$$\sphericalangle 1 = \frac{360}{2 \cdot 3{,}14} = 57^\circ 17' 44'',8 \quad \ldots\ldots \quad 127)$$

Ferner ist nach Fig. 128, wenn die Umfangsgeschwindigkeit (als Teil des Kreisbogens) mit v, die zugehörige Winkelgeschwindigkeit mit ω bezeichnet wird:

$$\frac{v}{r} = \frac{\omega}{\sphericalangle 1}$$

oder:

$$v = r\,\omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad 128)$$

Bogen = Radius mal Winkel

Durch Einsetzung des Wertes für v in Gl. 126) erhält man dann für die Centripetalkraft den Ausdruck:

$$\mathbf{C} = \mathbf{m r}\omega^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 129)$$

Aufgabe 79. Das eine Ende eines 3 m langen ausgestreckten Fadens ist an einem festen Punkte C, das andere Ende an einer 4 kg schweren Kugel befestigt. Wenn der Kugel eine Geschwindigkeit v = 8 m senkrecht zur Richtung des Fadens erteilt wird, wie groß ist dann die auf die Kugel wirkende Centripetalkraft?

Auflösung.

$$C = \frac{m v^2}{r} = \frac{G}{g}\frac{v^2}{r} = \frac{4}{9{,}81}\cdot\frac{8^2}{3} = 8{,}7 \text{ kg}$$

Aufgabe 80. Um wieviel muß in einer Eisenbahnkurve vom Radius r die äußere Schiene gegen die innere erhöht werden, damit die Räder eines Wagens, welcher sich mit der Geschwindigkeit v in der Kurve bewegt, nicht gegen die äußere Schiene gepreßt werden?

Auflösung. Es sei S (Fig. 129) der Schwerpunkt des Wagens. Die Mittelkraft R aus dem Wagengewichte G und der Centrifugalkraft C muß rechtwinklig gegen die Geleisoberfläche stehen, daher ist nach den Bezeichnungen der Fig. 129:

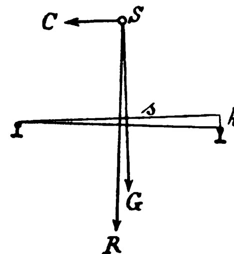


Fig. 129.

$$\frac{h}{s} = \frac{C}{G} \quad \text{oder} \quad h = \frac{C}{G}s$$

Setzt man hierin für C den Wert aus Gl. 126):

$$C = \frac{m v^2}{r} = \frac{G}{g}\frac{v^2}{r}$$

ein, so folgt:

$$h = \frac{G}{g}\frac{v^2}{r}\frac{1}{G}s = \frac{s v^2}{g r}$$

Für g = ∾ 10 und s = ∾ 1,5 m wird:

$$h = 0{,}15\frac{v^2}{r}$$

Aufgabe 81. Wie groß muß die Neigung eines Reiters in einer kreisförmigen Reitbahn von 5 m Halbmesser bei einer Geschwindigkeit v = 4 m sein?

Auflösung. Nennt man den Winkel des Reiters gegen die Vertikale α, so ist:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{C}{G} = \frac{v^2}{g r} = \frac{4^2}{9{,}81 \,.\, 5} = 0{,}326$$

also:

$$\alpha = \backsim 18^0$$

§ 20.

Oscillierende Bewegung.

Eine gleichförmige Kreisbewegung kann auch angesehen werden als Resultierende von zwei nach den Richtungen XX und YY (Fig. 130) senkrecht zu einander gerichteten Seitenbewegungen. Betrachtet man von diesen nur die eine, z. B. die horizontale Seitenbewegung, so wird der Körper die geradlinige

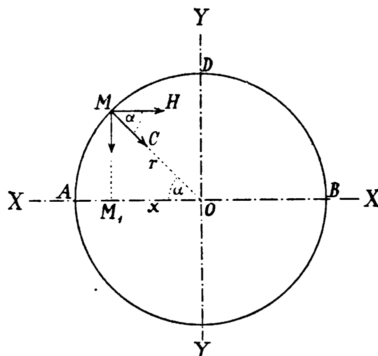
Strecke A B in derselben Zeit t durchlaufen, in welcher bei der kreisförmigen Bewegung der Halbkreis A D B mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v durchlaufen wurde. Es ist daher:

$$t = \frac{r\pi}{v}$$

Wird hierin für v der sich aus Gl. 126) ergebende Wert:

$$v = \sqrt{\frac{C r}{m}}$$

Fig. 130.



eingesetzt, so folgt:

$$t = r\pi : \sqrt{\frac{C r}{m}} = r\pi \sqrt{\frac{m}{C r}} = \pi \sqrt{\frac{m r}{C}}$$

oder:

$$\mathbf{t} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{r}}\,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m}}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 130)$$

Ist nun M derjenige Punkt, in welchem sich der Körper bei der gleichförmigen Kreisbewegung in einem bestimmten Zeitpunkte befindet, so wird er bei der horizontalen Seitenbewegung in demselben Zeitpunkte die Lage M_1 (senkrecht unter M) haben, und die in diesem Augenblick auf ihn einwirkende Kraft ist die Horizontalkomponente H der die Kreisbewegung erzeugenden Centripetalkraft C. Nach Fig. 130 ist aber:

$$\mathbf{H} = \mathbf{C}\cos\alpha = \mathbf{C}\,\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{r}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 131)$$

Da in diesem Ausdrucke C und r konstante Größen sind, so folgt, daß die treibende Kraft proportional der Entfernung x ist. Sie erreicht ihren größten Wert $H_{max} = \pm C$ für $x = \pm r$, also in den Punkten A und B, wird = Null für x = Null, also im Punkte O. Für x = 1 wird:

$$\mathbf{H_1} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{r}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 132)$$

Zerlegt man im Punkte M die Umfangsgeschwindigkeit v nach den Richtungen XX und YY in ihre Seitengeschwindigkeiten, so ist $v \sin \alpha$ (|| XX) diejenige Geschwindigkeit, welche der Körper bei seiner Seitenbewegung im Punkte M_1 besitzt. Diese Geschwindigkeit hat im Punkte A die Größe Null, wird allmählich größer und erreicht ihren größten Wert v im Punkte O, nimmt dann wieder ab bis B, wo sie wiederum gleich Null ist. Darauf wird die Geschwindigkeit negativ, d. h. der Körper wird die umgekehrte Bewegung von B nach A ausführen.

Solche geradlinig hin- und hergehende Bewegungen nennt man oscillierende Bewegungen oder geradlinige Schwingungen; der Punkt O heißt das Schwingungscentrum, die Strecke $OA = OB = r$ die Schwingungsweite oder Amplitude.

Wird der sich aus Gl. 131) ergebende Wert:

$$\frac{C}{r} = \frac{H}{x}$$

in Gl. 130) eingesetzt, so folgt:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{H}{x} \frac{1}{m}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{H}{m} \frac{1}{x}}}$$

Der Quotient $\frac{H}{m}$ $\left(\text{d. i. } \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}\right)$ ist die Beschleunigung, welche dem Körper im Punkte M_1 von der treibenden Kraft erteilt wird. Bezeichnet man diese Beschleunigung mit p, so wird:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{p}{x}}} \quad \text{. . . . . 133)}$$

für $x = 1$ wird:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{p_1}} \quad \text{. . . . . 134)}$$

worin p_1 die Schwingungsbeschleunigung in der Entfernung 1 vom Schwingungscentrum bedeutet.

§ 21.

Das Pendel.

Unter einem physischen oder zusammengesetzten Pendel versteht man jeden schweren Körper, welcher um eine, nicht durch seinen Schwerpunkt gehende Achse drehbar ist; unter einem einfachen, oder mathematischen Pendel dagegen denkt man sich eine am oberen Ende festgehaltene gewichtlose Linie, an deren unterem Ende ein schwerer Punkt befestigt ist. Annähernd kann ein feiner Faden mit unten angehängter kleiner Metallkugel als ein mathematisches Pendel betrachtet werden.

Wird ein solches Pendel (Fig. 131) aus seiner Gleichgewichtslage O A entfernt, in die Lage O B gebracht, und dann der Wirkung der Schwere überlassen, so wird dasselbe mit beschleunigter Bewegung in die Gleichgewichtslage O A zurückkehren, vermöge der erlangten Geschwindigkeit dort aber nicht in Ruhe bleiben, sondern mit verzögerter Bewegung sich aufwärts weiter bis nach B_1 bewegen. Dort mit der Geschwindigkeit Null angekommen, wird das Pendel zurückkehren, wieder über A nach B gelangen und in dieser Weise fortfahren, hin- und hergehende Bewegungen um die Gleichgewichtslage O A auszuführen.

Man nennt die Bewegung des Pendels aus der Lage O B in die Lage OB_1 oder umgekehrt eine Schwingung, die dazu erforderliche Zeit die Schwingungszeit und den Winkel α den Ausschlagwinkel.

Fig. 131.

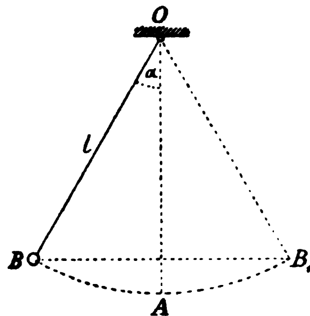
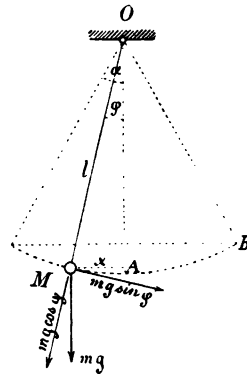


Fig. 132.



Zerlegt man in dem Augenblicke, wo der Ausschlagwinkel $= \varphi$ ist (Fig. 132), das Gewicht G der Kugel in zwei Komponenten nach der Richtung M O und senkrecht dazu (also tangential), so wird erstere durch den Widerstand der festen Drehachse O aufgehoben, während die Tangentialkomponente die allein treibende Kraft für die Kugel bildet. Diese Kraft hat die Größe:

$$K = G \sin \varphi = m g \sin \varphi$$

und wenn nach Fig. 132):

$$\sin \varphi = \frac{x}{l}$$

eingesetzt wird:

$$K = m g \frac{x}{l} = \frac{m g}{l} x$$

Die treibende Kraft ist also proportional der Horizontalentfernung x von der Gleichgewichtslage O A.

Die Tangentialbeschleunigung wird nach der letzten Gleichung:

$$p = \frac{K}{m} = \frac{g}{l} x$$

welche für $x = 1$ den Wert annimmt:

$$p_1 = \frac{g}{l} \qquad \qquad 135)$$

Für sehr kleine Ausschlagwinkel kann statt des von der Kugel in Wirklichkeit durchlaufenen Bogens MA genügend genau die Horizontalprojektion x des Bogens gesetzt werden, und darf man alsdann die Entwickelungen des § 20 ohne weiteres auf den vorliegenden Fall anwenden.

Durch Einsetzung des in Gl. 135) gefundenen Wertes von p_1 in die Gl. 134) ergibt sich danach für kleine Ausschlagwinkel die Schwingungszeit des Pendels annähernd zu:*)

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \qquad 136)$$

worin l die Pendellänge vom Aufhängepunkte des Fadens bis zum Schwerpunkt der Kugel bedeutet.

Es darf unter der Annahme kleiner Ausschlagwinkel (bis etwa 5°) nach Gl. 136) die Schwingungszeit eines Pendels als unabhängig vom Ausschlagwinkel angenommen werden. Danach wird z. B. ein Pendel bei einem Ausschlagwinkel von 2° in einer bestimmten Zeit ebenso viele Schwingungen machen, als bei einem Ausschlagwinkel von 4°. Man findet daher experimentell die Schwingungszeit t eines Pendels, wenn man bei kleinem Ausschlagwinkel die Anzahl n der Schwingungen während einer längeren Zeit T beobachtet zu:

$$t = \frac{T}{n}$$

Wenn z. B. ein Pendel in 5 min 450 Schwingungen macht, so ist die Dauer einer Schwingung

$$t = \frac{5 \cdot 60}{450} = {}^2/_3 \text{ sec}$$

Aus Gl. 136 folgt, daß die Schwingungszeit des Pendels unabhängig ist vom Gewichte der Kugel. Zwei gleich lange Pendel, z. B. das eine mit Bleikugel, das andre mit Holzkugel, machen in gleichen Zeiten die gleiche Anzahl von Schwingungen.

Angenommen nun, man hat zwei Pendel, das eine von der Länge l_1, das andere von der Länge l_2, so sind nach Gl. 136) die Schwingungszeiten:

für das erste Pendel: $t_1 = \pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}$

„ „ zweite „ $t_2 = \pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}$

*) Die genaue Formel bei dem Ausschlagwinkel φ ist:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\varphi}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6\frac{\varphi}{2} + \ldots\ldots\right]$$

Durch Division beider Ausdrücke ergibt sich:

$$t_1 : t_2 = \sqrt{l_1} : \sqrt{l_2} \quad \text{oder:} \quad l_1 : l_2 = t_1^2 : t_2^2 \quad . \; . \; . \; 137)$$

Danach verhalten sich die Schwingungszeiten zweier Pendel wie die Wurzeln aus ihren Längen, oder: die Pendellängen verhalten sich wie die Quadrate der Schwingungszeiten.

Setzt man in Gl. 136) $t = 1$, so erhält man die Länge des Sekundenpendels:

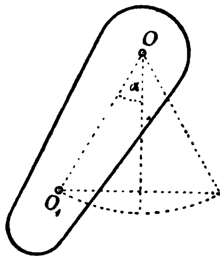
$$l_s = \frac{g}{\pi^2} = \frac{9{,}81}{3{,}14^2} = 0{,}994 \text{ m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 138)$$

Die Gl. 136) kann ferner benutzt werden, um die Größe der Fallbeschleunigung für verschiedene Punkte der Erdoberfläche zu berechnen, wenn bei gegebener Pendellänge l die Schwingungszeit t direkt beobachtet wurde. Es ist dann:

$$g = l \frac{\pi^2}{t^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 139)$$

Da das physische Pendel (Fig. 133) als schwerer Körper ein System von unendlich vielen unveränderlich miteinander verbundenen materiellen Punkten bildet, so ist dasselbe anzusehen als bestehend aus unendlich vielen einfachen Pendeln von ungleicher Länge. Die der Drehachse O näher liegenden Punkte haben das Bestreben, schneller zu schwingen als die entfernteren. Da aber sämtliche Punkte vermöge ihres Zusammenhanges gleichzeitig schwingen müssen, so werden die näher liegenden durch die entfernteren in ihrer Bewegung verzögert, während umgekehrt die entfernteren durch die näher liegenden in ihrer Bewegung beschleunigt werden. Es muß daher zwischen ihnen irgend einen Punkt O_1 geben, welcher weder eine Beschleunigung noch eine Verzögerung erfährt, und welcher gerade so schwingt, als ob er der einzige schwere Punkt des Pendels wäre, also genau so, wie ein mathematisches Pendel von der Länge $O O_1$.

Fig. 133



Man nennt den Punkt O_1 den Schwingungsmittelpunkt, die Länge $O O_1$ die reduzierte Länge des physischen Pendels.

Der Schwingungsmittelpunkt hat die wichtige Eigenschaft, daß er mit dem Drehpunkte vertauscht werden kann, ohne daß dadurch die Schwingungszeit des Pendels sich ändert. Man kann diese Eigenschaft dazu benutzen, die Länge $O O_1$ auf dem Wege des Experimentes zu bestimmen, indem man bei einem Pendel mit einer festen und einer verstellbaren Drehachse die letztere so lange verschiebt, bis das an dieser Achse aufgehängte Pendel in einer bestimmten Zeit die nämliche Anzahl Schwingungen macht, als wenn es um die feste Achse schwingt. Ein so eingerichtetes Pendel wird Reversionspendel genannt.

Die reduzierte Länge des physischen Pendels kann auch annähernd dadurch gefunden werden, daß man die Schwingungszeit t desselben beobachtet und die Länge des mathematischen Pendels von der gleichen Schwingungszeit nach Gl. 136) berechnet. Es ist dann:

$$O O_1 = l = \frac{g t^2}{\pi^2} \qquad 140)$$

Läßt man ein einfaches Pendel nicht in der Vertikalebene schwingen, sondern erteilt demselben, nachdem es aus der Gleichgewichtslage in die Lage OB (Fig. 134) gebracht war, senkrecht zu der Ebene BOM (etwa durch Stoß) eine solche Geschwindigkeit v, daß die Kugel eine horizontale Kreislinie vom Halbmesser r gleichförmig durchläuft, der Faden also eine Kegelfläche beschreibt, so nennt man ein solches Pendel ein Centrifugal- oder Kegelpendel.

Fig. 134.

Die auf die Kugel von der Masse m wirkende Schwerkraft mg zerlegt sich in die Seitenkräfte P = BD und C = BF (= DE). Erstere erscheint als Spannung des Fadens und wird durch den Widerstand des Aufhängepunktes O aufgehoben, während die Kraft C diejenige Kraft ist, welche die Kugel zu der Kreisbewegung zwingt, also stets durch den Mittelpunkt M der Kreislinie hindurchgehen und nach Gl. 126) S. 108 die Größe haben muß:

$$C = \frac{m v^2}{r}$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke BDE und OBM folgt:

$$DE : BE = BM : OM$$

oder:

$$\frac{m v^2}{r} : m g = r : h$$

Daraus ergibt sich für die Geschwindigkeit v die Größe:

$$v = r \sqrt{\frac{g}{h}} \qquad 141)$$

Die Zeit eines Umlaufs ist:

$$t = \frac{2 r \pi}{v}$$

und wenn für v der Wert aus der vorigen Gleichung eingesetzt wird:

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} \qquad 142)$$

Für die Spannung P des Fadens erhält man den Ausdruck:

$$P = \sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{mv^2}{r}\right)^2} = mg\sqrt{1 + \left(\frac{v^2}{rg}\right)^2} \quad . \quad 143)$$

Nach den Gleichungen 141) und 142) sind die Größen v und t unabhängig vom Gewichte der Kugel, dagegen abhängig von h; je kleiner h wird, desto größer wird die Geschwindigkeit v, desto kleiner die Umlaufszeit t. Für h = Null wird $v = \infty$ und t = Null, d. h. die von dem Faden beschriebene Kegelfläche geht niemals in eine Ebene über.

Für einen sehr kleinen Ausschlagwinkel α kann man genügend genau h mit der Fadenlänge l vertauschen und erhält dann statt Gl. 142)

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

In diesem Falle (für kleine Ausschlagwinkel) ist also die Umlaufszeit des Kegelpendels doppelt so groß, als die Schwingungszeit eines einfachen in einer Vertikalebene schwingenden Pendels von gleicher Länge.

Aufgabe 82. Wie groß ist die Schwingungszeit eines Pendels von 80 cm Länge? (g = 9,81 m.)

Auflösung. Nach Gl. 136) ist:

$$t = \pi\sqrt{\frac{0{,}8}{9{,}81}} = 0{,}895 \text{ sec}$$

Aufgabe 83. Ein Pendel von 1,5 m Länge macht an einem bestimmten Orte in 5 min 244 Schwingungen; wie groß ist danach die Fallbeschleunigung g an diesem Orte?

Auflösung. Die Zeit einer Schwingung ist:

$$t = \frac{5 \,.\, 60}{244} = 1{,}2295 \text{ sec}$$

folglich nach Gl. 139)

$$g = \frac{3{,}14^2 \,.\, 1{,}5}{1{,}2295^2} = 9{,}79 \text{ m}$$

Aufgabe 84. Wie groß ist die reduzierte Länge eines physischen Pendels, dessen Schwingungszeit 0,5 sec beträgt? (g = 9,81 m.)

Auflösung. Nach Gl. 140 ist:

$$l = \frac{9{,}81 \,.\, 0{,}5^2}{3{,}14^2} = 0{,}249 \text{ m}$$

Aufgabe 85. Bei einem Kegelpendel (Fig. 134) sei h = 4 m; r = 2 m; das Gewicht der Kugel: G = mg = 8 kg. Es sollen die Größen v, t, P unter Annahme von g = 9,81 m berechnet werden.

Auflösung. Nach Gl. 141) ist:

$$v = 2\sqrt{\frac{9{,}81}{4}} = 3{,}132 \text{ m}$$

Nach Gl. 142) ist:

$$t = 2 \cdot 3{,}14 \sqrt{\frac{4}{9{,}81}} = 4{,}01 \text{ sec}$$

Nach Gl. 143) ist:

$$P = 8 \sqrt{1 + \left(\frac{3{,}132^2}{2 \cdot 9{,}81}\right)^2} = 8{,}96 \text{ kg}$$

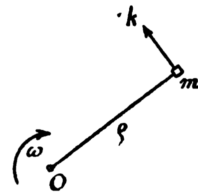
§ 22.

Vom Trägheitsmoment.

Bei einem Körper, welcher eine fortschreitende Bewegung ausführt, haben die sämtlichen Punkte stets gleiche Geschwindigkeiten; führt der Körper dagegen eine Drehbewegung um eine mit ihm fest verbundene Achse O aus, so sind die linearen Geschwindigkeiten seiner einzelnen Punkte im allgemeinen verschieden und abhängig von deren Entfernung von der Drehachse.

Der sich drehende Körper würde nach dem Gesetze der **Trägheit** seine Bewegung unverändert fortsetzen; es ist daher ein der Drehrichtung entgegenwirkendes konstantes Kraft-**Moment** erforderlich, welches während einer gewissen Zeit t wirksam sein muß, um den Körper zur Ruhe zu bringen. Unter dem Einflusse dieses Momentes führt der Körper während der Zeit t eine gleichförmig verzögerte Bewegung aus.

Fig. 135.



Wird die Geschwindigkeit der Drehbewegung (die Winkelgeschwindigkeit) mit ω bezeichnet, so hat zu Anfang der Zeit t ein in der Entfernung ϱ von der Drehachse befindliches Massenteilchen nach Gl. 128) S. 108 die Geschwindigkeit

$$v = \varrho\,\omega$$

die Verzögerung desselben während der Zeit t ist daher nach Gl. 9) S. 6

$$p = \frac{\varrho\,\omega}{t}$$

folglich nach Gl. 13) S. 12 die auf das Massenteilchen wirkende verzögernde Kraft:

$$k = \frac{m\,\varrho\,\omega}{t}$$

Das statische Moment dieser Kraft in Bezug auf die Achse O (Fig. 135) ist:

$$k\,\varrho = \frac{m\,\varrho^2\,\omega}{t}$$

Ebenso groß würde eine Kraft k_1 sein müssen, welche am Hebelarme 1 wirkend dem Massenteilchen die gleiche Verzögerung erteilen würde als die Kraft k am Hebelarme ϱ, daher:

$$k_1 = \frac{m\,\varrho^2\,\omega}{t}$$

Da dieselbe Betrachtung für alle übrigen Massenteilchen des Körpers gilt, so gibt die Summe:

$$K_1 = \Sigma \left(\frac{m \varrho^2 \omega}{t}\right)$$

oder, da $\frac{\omega}{t}$ als gemeinsamer konstanter Faktor vor das Summenzeichen gesetzt werden kann, die Summe:

$$K_1 = \frac{\omega}{t} \Sigma (m \varrho^2)$$

die Größe derjenigen Kraft an, welche am Hebelarme 1 wirkend den sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω drehenden Körper in der Zeit t zur Ruhe bringen würde.

Der Faktor $\frac{\omega}{t}$ in der letzten Gleichung ist die Verzögerung der in der Entfernung 1 von der Drehachse befindlichen Massenteilchen. Es gibt daher die Summe $\Sigma (m \varrho^2)$ die Größe einer Masse an, welche, wenn sie in einem Punkte am Hebelarme 1 konzentriert wäre, dieselbe verzögernde Kraft K_1 erfordern würde, um ihre Bewegung in der Zeit t zu vernichten, als die Masse des Körpers selbst.

Der Ausdruck $\Sigma (m \varrho^2)$, d. i. die Summe aller Massenteilchen, multipliziert mit dem Quadrate ihrer Abstände von der Drehachse, wird das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehachse genannt und ziemlich allgemein mit J bezeichnet.

$$\mathbf{J = \Sigma (m \varrho^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 144)$$

Nach der obigen Herleitung könnte man das Trägheitsmoment definieren als die auf den Hebelarm 1 reduzierte Masse des Körpers, obgleich das Trägheitsmoment in Wirklichkeit keine Masse ist, und nur als Name für den Ausdruck $\Sigma (m \varrho^2)$ eingeführt wurde.

Haben sämtliche Massenteilchen des Körpers die gleiche Entfernung von der Drehachse, so kann man in Gl. 144) die Größe ϱ^2 als gemeinschaftlichen konstanten Faktor vor das Summationszeichen setzen und erhält dadurch:

$$J = \varrho^2 \Sigma (m)$$

oder wenn $\Sigma (m)$ als ganze Masse des Körpers mit μ bezeichnet wird:

$$\mathbf{J = \varrho^2 \mu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 145)$$

Das Trägheitsmoment eines Körpers kann danach ausgedrückt werden durch das Trägheitsmoment eines Ringes oder Hohlcylinders von sehr kleiner Wandstärke, dessen Mittelpunkt die Drehachse des Körpers bildet, dessen Radius $= \varrho$ und dessen Masse $= \mu$ ist.

Man nennt μ die auf den Halbmesser ϱ reduzierte Masse des Körpers. Da für einen bestimmten Körper und für eine bestimmte Drehachse das Trägheitsmoment J eine unveränderliche Größe ist, so fällt nach Gl. 145) μ um so größer aus, je kleiner ϱ wird und umgekehrt. Derjenige Wert von ϱ, bei

welchem die reduzierte Masse μ gleich der *wirklichen* Masse des Körpers ist, heißt der *Trägheitshalbmesser*.

Der Begriff des Trägheitsmomentes läßt sich auch auf *Flächen* ausdehnen, indem man die Fläche als gleichförmig mit Masse erfüllt ansieht, also als eine unendlich dünne Platte auffaßt. Setzt man daher in Gl. 144) statt der Massenteilchen m die diesen proportionalen Flächenteilchen f, und bezeichnet man den Abstand jedes einzelnen Flächenteilchens von der Achse mit y, so erhält man als Trägheitsmoment einer Fläche den Ausdruck:

$$J = \Sigma (f y^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 146)$$

Das Trägheitsmoment einer Fläche in Bezug auf eine bestimmte Achse ist gleich der Summe aller Flächenteilchen, multipliziert mit dem Quadrate ihrer Abstände von dieser Achse.

Die Trägheitsmomente der wichtigsten Querschnittsflächen sind in des Verfassers Festigkeitslehre § 4 aufgeführt.

§ 23.

Vom Stoße der Körper.

Wenn ein bewegter Körper mit einem andern bewegten oder ruhenden Körper zusammentrifft, so entsteht ein Stoß. Bewegen sich die Schwerpunkte der als homogen vorausgesetzten Körper vor dem Stoße in einer geraden Linie, welche senkrecht auf der Berührungsfläche N N steht (Fig. 136) und durch den Schwerpunkt dieser Berührungsfläche hindurchgeht, so heißt der Stoß *gerade* und *central*, im Gegensatze zu dem *schiefen* und dem *excentrischen* Stoße.

Fig. 136.

Bei dem geraden, centralen Stoße treten nur Aenderungen in der fortschreitenden Bewegung der Körper auf, und diese bewegen sich nach dem Stoße in derselben Geraden wie vor dem Stoße; dagegen hat der schiefe Stoß neben Geschwindigkeitsänderungen auch Richtungsveränderungen, der excentrische Stoß noch Drehbewegung zur Folge.

Wir beschränken uns hier auf Besprechung des geraden, centralen Stoßes und zwar für *vollkommen unelastische* und für *vollkommen elastische Körper*. Wenn es auch in der Natur streng genommen solche Körper nicht gibt, so kommen doch Körper vor, welche sehr elastisch (Elfenbein) oder sehr unelastisch (feuchter Thon) sind.

1. Gerader, centraler Stoß vollkommen unelastischer Körper.

Es seien m_1 und m_2 die Massen zweier Körper, welche sich mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 in derselben Richtung bewegen. Ist die Geschwindigkeit v_2 der vorangehenden Masse m_2 kleiner als die Geschwindigkeit v_1 der ihr folgenden Masse m_1, so werden beide Körper in irgend einem Zeitpunkte zusammenstoßen. Dadurch entstehen an der Berührungsfläche die einander gleichen, aber entgegengesetzten Druckkräfte D (Fig. 136), durch welche die Geschwindigkeit der Masse m_1 verkleinert, die der Masse m_2 aber vergrößert wird, bis beide Massen sich mit der gleichen Geschwindigkeit u fortbewegen. Die während des Stoßes erfolgende Geschwindigkeitsabnahme der Masse m_1 ist daher $= v_1 - u$, die Geschwindigkeitszunahme der Masse m_2 ist $= u - v_2$.

Bezeichnet man die Zeitdauer des Stoßes mit t, so sind $\frac{v_1 - u}{t}$ und $\frac{u - v_2}{t}$ die durch die gleichen Kräfte D und in der Richtung derselben erzeugten Beschleunigungen der Massen m_1, bezw. m_2.

Da sich nun nach § 4 S. 12 die Massen umgekehrt verhalten, wie die Beschleunigungen, welche gleiche Kräfte ihnen erteilen, so ist:

$$m_1 : m_2 = \frac{u - v_2}{t} : \frac{v_1 - u}{t}$$

oder:

$$m_1 (v_1 - u) = m_2 (u - v_2)$$

Daraus ergibt sich für die Geschwindigkeit u nach dem Stoße der Wert:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad \ldots \ldots \quad 147)$$

Bewegen sich die Körper nicht hintereinander her, sondern gegeneinander, so ändert v_2 sein Vorzeichen, und man erhält dann:

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad \ldots \ldots \quad 148)$$

Die vor dem Stoße vorhandene totale Arbeitsgröße (die lebendige Kraft der beiden Massen) ist:

$$\mathfrak{A} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \quad \ldots \ldots \quad 149)$$

Die Arbeitsgröße nach dem Stoße, wo beide Massen sich mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit u fortbewegen, ist:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot u^2$$

oder, wenn hierin für u der Wert aus den Gleichungen 147) bezw. 148) eingesetzt wird:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{(m_1 v_1 \pm m_2 v_2)^2}{2 (m_1 + m_2)} \quad \ldots \ldots \quad 150)$$

Die Differenz: $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1$ bezeichnet diejenige Arbeitsgröße, welche für die fortschreitende Bewegung verloren geht und aufgewandt wird zur Zusammendrückung (Deformation) der Körper. Durch Subtraktion der Gleichungen 149) und 150) ergibt sich:

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 \mp v_2)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 151)$$

Die oberen Zeichen in den Gleichungen 150) und 151) gelten für die gleiche, die unteren Zeichen für die entgegengesetzte Bewegungsrichtung der Körper.

Ist die Masse m_2 vor dem Stoße in Ruhe, also $v_2 =$ Null, und bezeichnet man die Geschwindigkeit der stoßenden Masse dann mit v, so ergeben sich aus den Gleichungen 147) bis 151) die folgenden:
Geschwindigkeit nach dem Stoße:

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 152)$$

Totalarbeit vor dem Stoße:

$$\mathfrak{A} = \frac{m_1 v^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 153)$$

Bewegungsarbeit nach dem Stoße:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 v^2}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad 154)$$

Deformationsarbeit:

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 v^2}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad 155)$$

In allen den Fällen, wo der Stoß zur Bewegungserzeugung benutzt wird, wie z. B. beim Einrammen von Pfählen, beim Einschlagen eines Nagels oder Keiles u. s. w., ist $\mathfrak{A}_1$ nützliche Arbeit, die nach Gl. 154) um so größer ausfällt, je kleiner das Verhältnis $\frac{m_2}{m_1}$ ist, d. h. je kleiner die gestoßene Masse im Verhältnis zur stoßenden ist. Es ist hier also vorteilhaft, die stoßende Masse möglichst groß, die gestoßene Masse möglichst klein zu machen.

Umgekehrt gibt es Fälle, bei denen die Deformationsarbeit als nützliche Arbeit erscheint, wie z. B. beim Schmieden; man wird dann, um diese möglichst groß zu erhalten, nach Gl. 155) die stoßende Masse (den Hammer) klein, die gestoßene Masse (den Amboß) groß wählen müssen.

2. Gerader, centraler Stoß vollkommen elastischer Körper.

Der Stoß elastischer Körper erfolgt in zwei Perioden. In der ersten Periode findet eine Zusammendrückung statt, wie bei dem Stoße unelastischer Körper; in der zweiten Periode nehmen die Körper vermöge ihrer Elasticität ihre ursprüngliche Form wieder an.

Ist u die am Ende der ersten Stoßperiode erlangte gemeinschaftliche Geschwindigkeit der Massen m_1 und m_2, die sich mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 hintereinander her bewegen, so ist: $(v_1 - u)$ die Geschwindigkeitsabnahme der hinteren Masse m_1, und: $(u - v_2)$ die Geschwindigkeitszunahme der vorderen Masse m_2 während der ersten Stoßperiode. Es ergibt sich deshalb, wie bei dem unelastischen Stoße (Gl. 147):

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

In dem Augenblicke, wo die erste Stoßperiode in die zweite übergeht, ist die größte Zusammendrückung der Massen erfolgt, und es beginnen dann die zusammengedrückten Teile wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückzukehren. Dabei verliert die Masse m_1 nochmals die Geschwindigkeit $(v_1 - u)$, während die Geschwindigkeitszunahme der Masse m_2 wieder, wie in der ersten Periode: $(u - v_2)$ beträgt. Der ganze Geschwindigkeitsverlust der Masse m_1 ist danach $= 2(v_1 - u)$, der gesamte Geschwindigkeitszuwachs der Masse m_2 ist $= 2(u - v_2)$.

Bezeichnet man die Geschwindigkeiten der Massen m_1 und m_2 am Ende des Stoßes mit c_1 und c_2, so ist danach:

$$c_1 = v_1 - 2(v_1 - u) = 2u - v_1$$
$$c_2 = v_2 + 2(u - v_2) = 2u - v_2$$

oder, wenn für u der obige Wert eingesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{2 m_2 v_2 + v_1 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \\ c_2 &= \frac{2 m_1 v_1 - v_2 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 156)$$

Bewegen sich die Körper vor dem Stoße nach entgegengesetzten Richtungen, so ist in die Gleichungen 156): $-v_2$ für v_2 einzusetzen.

Für $m_1 = m_2$ folgt aus den Gleichungen 156):

$$c_1 = v_2 \quad \text{und} \quad c_2 = v_1$$

d. h. gleiche Massen vertauschen durch den Stoß ihre Geschwindigkeiten. Bewegten sich die Körper vor dem Stoße in derselben Richtung, so behalten sie auch nach dem Stoße diese Richtung bei. War vor dem Stoße die Bewegung der Körper entgegengesetzt, so bleibt sie auch nach dem Stoße entgegengesetzt gerichtet; jeder Körper wird dann von der Stelle des Zusammenstoßes mit derjenigen Geschwindigkeit wieder zurückkehren, welche vor dem Stoße der andere Körper hatte.

Ist die gestoßene Masse in Ruhe, so ergibt sich aus den Gleichungen 156), indem man darin $v_2 =$ Null, und $v_1 = v$ setzt:

$$c_1 = \frac{v (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}; \qquad c_2 = \frac{2 m_1 v}{m_1 + m_2} \quad \ldots \quad 157)$$

für $m_1 = m_2$ folgt daraus:

$$c_1 = 0; \qquad c_2 = v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 158)$$

d. h.: Stößt eine Masse mit der Geschwindigkeit v auf eine gleich große ruhende Masse, so kommt die stoßende Masse zur Ruhe und die gestoßene nimmt die Geschwindigkeit der stoßenden an.

Ist das Verhältnis $\frac{m_1}{m_2}$ = Null, d. h. stößt eine sehr kleine Masse mit der Geschwindigkeit v gegen eine sehr große ruhende Masse (z. B. gegen eine feste Wand), so wird nach den Gleichungen 157):

$$c_1 = -v; \qquad c_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 159)$$

d. h. die stoßende Masse prallt mit der Geschwindigkeit v von der gestoßenen Masse zurück; letztere bleibt in Ruhe.

Bei den vollkommen elastischen Körpern tritt durch den Stoß kein Arbeitsverlust ein, denn die Summe der lebendigen Kräfte der Körper vor und nach dem Stoße ist die gleiche. Es ist also:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 c_1^2}{2} + \frac{m_2 c_2^2}{2}$$

was sich leicht nachweisen läßt, indem man für c_1 und c_2 die in den Gleichungen 156) angegebenen Werte einsetzt.

In der ersten Hälfte des Stoßes findet dagegen für die Bewegung ein Verlust an lebendiger Kraft statt, welcher aufgewandt wird zur Kompression der zusammenstoßenden Körper selbst oder der an ihnen angebrachten besonderen Stoßapparate, z. B. der Puffer bei den Eisenbahnwagen.

Dieser Arbeitsverlust ist gleich der Deformationsarbeit beim unelastischen Stoße, hat also, wenn die gestoßene Masse m_2 vorher in Ruhe war, nach Gl. 155) die Größe:

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{m_1 v^2}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 160)$$

Sind die Massen einander gleich ($m_1 = m_2 = m$), so wird:

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m v^2}{2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 161)$$

Aufgabe 86. Ein unelastischer 2,94 kg schwerer Körper bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v_1 = 4$ m, und wird von einem anderen unelastischen 1,96 kg schweren Körper, welcher sich mit der Geschwindigkeit $v_2 = 9$ m in derselben Richtung bewegt, gestoßen. Wie groß ist die gemeinschaftliche Geschwindigkeit u nach dem Stoße?

Auflösung. Die Massen der beiden Körper sind:

$$m_1 = \frac{2,94}{9,81} = 0,3; \qquad m_2 = \frac{1,96}{9,81} = 0,2$$

folglich ist nach Gl. 147)

$$u = \frac{0,3 \, . \, 4 + 0,2 \, . \, 9}{0,3 + 0,2} = 6 \text{ m}$$

Aufgabe 87. Wie groß wird u bei entgegengesetzt gerichteter Bewegung der beiden Körper?

Auflösung (Gl. 148).

$$u = \frac{0{,}3 \,.\, 4 - 0{,}2 \,.\, 9}{0{,}3 + 0{,}2} = -\,1{,}2 \text{ m}$$

Die Bewegung erfolgt also in der Richtung, die der Körper von der Masse m_2 vor dem Stoße hatte.

Aufgabe 88. Wenn in Aufgabe 86 der zweite Körper vor dem Stoße in Ruhe war, wie groß wird dann die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße?

Auflösung (Gl. 152).

$$u = \frac{0{,}3}{0{,}3 + 0{,}2} \,.\, 4 = 2{,}4 \text{ m}$$

Aufgabe 89. Zwei elastische Körper, deren Massen $m_1 = 5$ und $m_2 = 3$ sind, stoßen mit den Geschwindigkeiten $v_1 = 5$ und $v_2 = 4$ m aufeinander. Wie groß sind ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoße?

a) bei gleicher Richtung vor dem Stoße

b) bei entgegengesetzter Richtung vor dem Stoße.

Auflösung. Für a) ist nach den Gleichungen 156)

$$c_1 = \frac{2 \,.\, 3 \,.\, 4 + 5\,(5 - 3)}{5 + 3} = 4{,}25$$

$$c_2 = \frac{2 \,.\, 5 \,.\, 5 - 4\,(5 - 3)}{5 + 3} = 5{,}25$$

für b) wird:

$$c_1 = \frac{-\,2 \,.\, 3 \,.\, 4 + 5\,(5 - 3)}{5 + 3} = -\,1{,}75$$

$$c_2 = \frac{2 \,.\, 5 \,.\, 5 + 4\,(5 - 3)}{5 + 3} = 7{,}25$$

Aufgabe 90. Mittels eines 1000 kg schweren Hammers wird ein glühendes Eisenstück auf einem Amboß ausgeschmiedet. Die Hubhöhe des Hammers beträgt: $h = 1{,}6$ m; das Gewicht des Amboß samt dem darauf liegenden Schmiedestück sei $= 9200$ kg. Wie groß ist die Nutzarbeit, und wie groß die auf Einrammen des Amboß, auf Erschütterung der Gebäude-Fundamente u. s. w. verwendete schädliche Arbeit?

Auflösung. Aus der Hubhöhe des Hammers ergibt sich nach Gl. 119) S. 103 die Endgeschwindigkeit v zu:

$$v = \sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 1{,}6} = 5{,}6 \text{ m}$$

Die lebendige Kraft des Hammers unmittelbar vor dem Stoße ist dann nach Gl. 153):

$$\mathfrak{A} = \frac{1000}{9{,}81} \cdot \frac{5{,}6^2}{2} = 1600 \text{ mkg}$$

Da das Verhältnis der Massen gleich dem Verhältnis der Gewichte ist, so ergibt sich nach Gl. 154) die Bewegungsarbeit (schädliche Arbeit) zu:

$$\mathfrak{A}_1 = 1600 \left(\frac{1}{1 + \frac{9200}{1000}} \right) = 1600 \,.\, 0{,}098 = 157 \text{ mkg}$$

und nach Gl. 155) die Deformationsarbeit (nützliche Arbeit) zu:

$$\mathfrak{A}_2 = 1600\left(\frac{1}{1+\frac{1000}{9200}}\right) = 1600 . 0{,}902 = 1443 \text{ mkg}$$

Der Arbeitsverlust beträgt also gegen 10 %.

Aufgabe 91. Der Bär einer Kunstramme sei 1000 kg schwer, die Hubhöhe desselben betrage 160 cm. Wenn die Eindringungstiefe s des 250 kg schweren Pfahles bei dem letzten Schlage des Bären 0,8 cm beträgt, wie groß ist dann der Widerstand W, welchen das Erdreich dem Eindringen des Pfahles entgegensetzt (die Tragfähigkeit des Pfahles)?

Auflösung. Die mechanische Arbeit des Erdwiderstandes ist = W s. Diese ist nach (Gl. 21) S. 22 gleichzusetzen dem auf Bewegungsarbeit verwendeten Teile der lebendigen Kraft des Bären (Gl. 154). Außerdem wird die nach dem Stoße von dem Gewichte G_1 des Bären und dem Gewichte G_2 des Pfahles verrichtete mechanische Arbeit $(G_1 + G_2)\, s$ zum Ueberwinden des Widerstandes W verwendet. Es ist daher:

$$W s = \frac{m_1 v^2}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{m_2}{m_1}}\right) + (G_1 + G_2)\, s$$

$$W s = \frac{G_1}{g}\,\frac{2 g h}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{G_2}{G_1}}\right) + (G_1 + G_2)\, s$$

$$W s = \frac{G_1 h}{1+\frac{G_2}{G_1}} + (G_1 + G_2)\, s$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte ergibt sich:

$$W . 0{,}8 = \frac{1000 . 600}{1+\frac{250}{1000}} + (1000 + 250)\, 0{,}8$$

oder:

$$W = 160\,000 + 1250 = 161\,250 \text{ kg}$$

Der Sicherheit wegen nimmt man die Belastung des Pfahles nur zu etwa $^1/_8$ W an.

Abschnitt IV.

Die Lehre vom Gleichgewicht (Statik) tropfbar flüssiger Körper.

§ 24.

Unterschied zwischen festen und flüssigen, zwischen tropfbar flüssigen und gasförmigen Körpern.

Die flüssigen Körper unterscheiden sich von den festen hauptsächlich dadurch, daß sie weder einen Widerstand gegen Zerreißen noch gegen Abscherung besitzen und daß der Reibungskoeffizient der Ruhe bei ihnen gleich Null ist. Ihre Grundeigenschaft ist die leichte Verschiebbarkeit ihrer Teilchen.

Während aber die tropfbar flüssigen Körper einen gewissen Grad von Kohäsion haben, der sich in dem Bestreben, Tropfen zu bilden, äußert, haben die gasförmigen Flüssigkeiten vielmehr das Bestreben, sich immer mehr auszudehnen. Die abstoßenden Kräfte zwischen den einzelnen materiellen Punkten erreichen bei einer gasförmigen Flüssigkeit niemals die Größe Null, und diese kann sich nur dann im Gleichgewicht befinden, wenn sie ringsum von Gefäßwänden eingeschlossen ist.

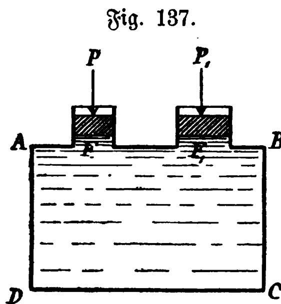
Ein anderer, allerdings weniger wesentlicher Unterschied zwischen den tropfbar flüssigen und den gasförmig flüssigen Körpern besteht noch darin, daß letztere verhältnismäßig leicht in einen kleinen Raum zusammengedrückt werden können, während die ersteren sehr schwer zusammendrückbar sind. Zum Beispiel nimmt das Volumen einer Wassermasse, auf welche von allen Seiten ein Druck von 1 kg auf den qcm ausgeübt wird, nur um $\frac{1}{20000}$ ab. Diese geringe Volumabnahme kann in der Technik vernachlässigt werden und man darf die tropfbar flüssigen Körper praktisch genügend genau als Körper von absolut unveränderlichem Rauminhalt behandeln.

§ 25.

Hydrostatischer Druck.

Infolge der leichten Verschiebbarkeit der Teilchen pflanzt sich der Druck, der auf irgend einen Teil der Oberfläche einer abgesperrten Flüssigkeit ausgeübt wird, durch die ganze Masse derselben gleichmäßig fort, so daß der Druck in allen Punkten der Oberfläche sowohl wie im Innern der Flüssigkeit und in allen Richtungen eine und dieselbe Größe hat (Gesetz des hydrostatischen Druckes).

Fig. 137.



Es sei ABCD (Fig. 137) ein Gefäß, in welchem eine Wassermasse eingeschlossen ist. Wird ein Teil der Gefäßwand durch einen beweglichen cylindrischen Kolben vom Querschnitt F ersetzt, und wirkt auf diesen von außen her und in der Achsenrichtung desselben eine Kraft P, so wird dadurch ein Druck p hervorgerufen, welcher sich auf die ganze Wandfläche des Gefäßes ausdehnt und für jede Flächeneinheit die Größe hat:

$$p = \frac{P}{F}$$

Es erleidet daher, abgesehen vom Gewichte des Wassers, jeder Teil der Gefäßwände, welcher $= F$ ist, denselben Druck $P = pF$; eine größere oder kleinere Fläche erleidet einen nach Verhältnis ihrer Größe größeren oder kleineren

Druck. Befindet sich daher an einer anderen Stelle des Gefäßes ein zweiter beweglicher cylindrischer Kolben vom Querschnitt F_1, so erhält dieser einen Druck $= p F_1$; um ein Herausschieben desselben zu verhindern, muß auf ihn von außen her eine Kraft P_1 wirken von der Größe:

$$P_1 = p F_1 = P \frac{F_1}{F}$$

Daraus folgt:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{F}{F_1} \quad \text{. . . . .} \quad 162)$$

Das Verhältnis der beiden Kräfte P und P_1 ist gleich dem Verhältnis der beiden Kolbenflächen. Die Gl. 162) bleibt auch dann noch richtig, wenn die Endflächen der Kolben eine beliebige krummlinige Form haben; man hat dann nur unter F bezw. F_1 die senkrecht zur Bewegungsrichtung der Kolben stehenden Querschnittsflächen der Oeffnungen zu verstehen, welche durch die

Fig. 138.

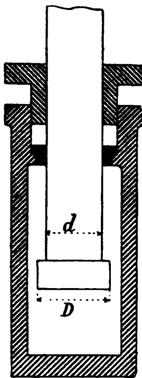
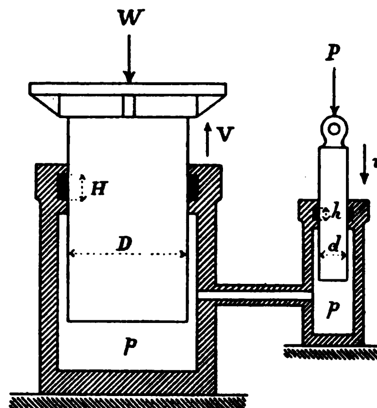


Fig. 139.



Kolben geschlossen werden. Ebenso hat eine innere Verdickung des Kolbens (Fig. 138) keinen Einfluß, da die Drücke auf die Ringfläche $\frac{(D^2 - d^2)\pi}{4}$ sich gegenseitig aufheben.

Auf dem Gesetze des hydrostatischen Druckes beruht die Wirkung der hydraulischen Presse (Fig. 139). Diese besteht im wesentlichen aus zwei mit Wasser gefüllten und durch eine Röhre miteinander verbundenen Cylindern mit oben dicht anschließenden beweglichen Kolben, einem größeren und einem kleineren.

Der Zweck der hydraulischen Presse ist, durch einen auf den kleinen Kolben ausgeübten äußeren Druck P einen auf den größeren Kolben wirkenden Widerstand W zu überwinden.

Sind D und d die Durchmesser der beiden Kolben und ist p der im

Innern der Flüssigkeit durch die äußeren Kräfte W und P erzeugte Druck pro Flächeneinheit, so ist für den Fall des Gleichgewichtes, abgesehen von den Reibungswiderständen:

$$W = \frac{D^2 \pi}{4} p$$

$$P = \frac{d^2 \pi}{4} p$$

folglich:

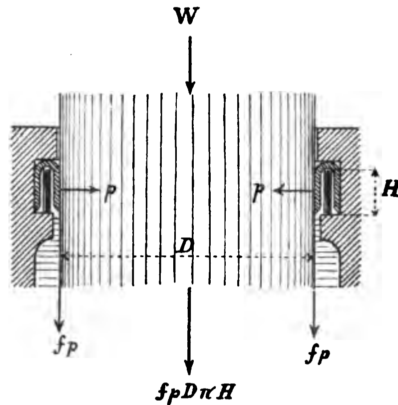
$$\frac{W}{P} = \frac{D^2}{d^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 163)$$

Da aus dem kleinen Cylinder durch den Niedergang seines Kolbens gerade so viel Wasser verdrängt wird, als in den großen Cylinder eintritt, so ist das Verhältnis der Kolbengeschwindigkeiten V und v gleich dem umgekehrten Verhältnisse der Kolbenquerschnitte, daher:

$$\frac{V}{v} = \frac{d^2}{D^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 164)$$

Die Dichtung zwischen Kolben und Cylinder wird gewöhnlich durch eine Ledermanschette bewirkt, die durch den Wasserdruck selbst einerseits gegen den Kolben, andererseits gegen die innere Cylinderwand gepreßt wird (Fig. 140).

Fig. 140.



Mit Berücksichtigung der an den Liderungen auftretenden Reibungswiderstände erhält man, wenn f der Reibungskoeffizient ist, und mit H und h die Höhen der Liderungen bezeichnet werden:

$$W = \frac{D^2 \pi}{4} p - f p D \pi H$$

$$P = \frac{d^2 \pi}{4} p + f p d \pi h$$

folglich:

$$\frac{W}{P} = \frac{D^2}{d^2}\left(\frac{1 - 4 f \frac{H}{D}}{1 + 4 f \frac{h}{d}}\right) \qquad 165)$$

Das Güteverhältnis ist danach:

$$\eta = \frac{1 - 4 f \frac{H}{D}}{1 + 4 f \frac{h}{d}} \qquad 166)$$

Aufgabe 92. Bei einer hydraulischen Presse sei:

$$d = 2 \text{ cm}; \; D = 40 \text{ cm}; \; f = 0{,}02; \; \frac{H}{D} = \frac{h}{d} = 0{,}2$$

Welcher Widerstand W kann durch eine auf den kleinen Kolben wirkende Kraft $P = 100$ kg überwunden werden?

Auflösung. Nach Gl. 166) ist das Güteverhältnis:

$$\eta = \frac{1 - 4 . 0{,}02 . 0{,}2}{1 + 4 . 0{,}02 . 0{,}2} = 0{,}968$$

Da nun:

$$\frac{D^2}{d^2} = \frac{40^2}{2^2} = 400$$

ist, so wird nach Gl. 165)

$$W = 100 . 400 . 0{,}968 = 38\,720 \text{ kg}$$

Ohne Reibungen würde nach Gl. 163) sein:

$$W = 100 . 400 = 40\,000 \text{ kg}$$

§ 26.

Einfluß der Schwerkräfte. Druck auf Gefäßwandungen.

Infolge der Schwere und der leichten Verschiebbarkeit der Teile **ist die freie Oberfläche einer in einem offenen Gefäße befindlichen Flüssigkeit eine horizontale Ebene**, denn bei einer gegen die Horizontale geneigten Oberfläche würden die obersten Teile sofort über die darunter liegenden, wie über eine schiefe Ebene herabgleiten.

Der durch das Eigengewicht der Flüssigkeit hervorgebrachte Druck nimmt in vertikaler Richtung in demselben Verhältnis wie die Tiefe zu. In jeder der horizontalen Oberfläche parallelen Ebene herrscht also überall gleicher Druck. Flüssigkeiten von verschiedenem Gewichte lagern sich in einem Gefäße so, daß sich stets die leichtere Flüssigkeit über die schwerere setzt (Oel über Wasser).

Der Druck, welchen eine Flüssigkeit auf den horizontalen Boden eines Gefäßes ausübt, ist gleich dem Gewichte einer

vertikalen Flüssigkeitssäule, deren Grundfläche der Boden, und deren Höhe der Abstand des Bodens von der Oberfläche der Flüssigkeit ist.

Dabei ist es gleichgültig, ob der Querschnitt des Gefäßes von unten nach oben derselbe bleibt (Fig. 141), oder sich vergrößert (Fig. 142) oder sich verkleinert (Fig. 143). Bei Fig. 141 ist das Gewicht der Flüssigkeit gleich dem Bodendruck, bei Fig. 142 größer, bei Fig. 143 kleiner als der Bodendruck.

Fig. 141.

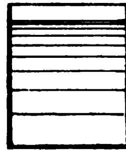


Fig. 142.

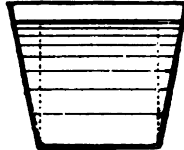
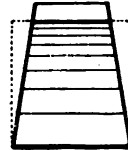


Fig. 143.



Ist F der Flächeninhalt des Bodens, h die Tiefe desselben unter der Oberfläche (die Druckhöhe) und γ das Gewicht der Kubikeinheit der Flüssigkeit, so ist der Bodendruck:

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}\mathbf{h}\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad 167)$$

So wie auf den Boden, so übt die Flüssigkeit auch auf die Seitenwände des Gefäßes einen Normaldruck aus. Dieser nimmt mit der Tiefe zu und ist für jedes Flächenteilchen der Wand gleich einer Flüssigkeitssäule, welche das Flächenteilchen zur Grundfläche und den vertikalen Abstand desselben von der Oberfläche der Flüssigkeit (dem Spiegel) zur Höhe hat.

Bezeichnet man diesen Abstand mit x und das Gewicht der Kubikeinheit der Flüssigkeit mit γ, so ist der Druck auf das Flächenteilchen f: $= f x \gamma$.

Der Gesamtdruck D auf die ganze Fläche ist daher:

$$D = \Sigma(f x \gamma) = \gamma \Sigma (f x)$$

und da nach Gl. 34) S. 37:

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots = \Sigma (f x) = F x_0$$

ist, wo x_0 den Abstand des Schwerpunktes der gedrückten Fläche vom Flüssigkeitsspiegel bedeutet, so wird:

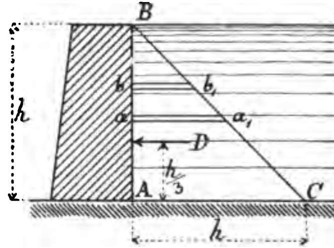
$$\mathbf{D} = \gamma \mathbf{F} \mathbf{x}_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 168)$$

Der Druck der Flüssigkeit gegen eine ebene Fläche ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt gleich der gedrückten Fläche, und deren Höhe gleich dem Abstande des Schwerpunktes dieser Fläche vom Flüssigkeitsspiegel ist.

Der Angriffspunkt von D, d. i. der Resultierenden sämtlicher auf die einzelnen Flächenteilchen wirkenden Druckkräfte, heißt der Mittelpunkt des Druckes. Derselbe liegt, da die Druckkräfte proportional mit der Tiefe zunehmen, stets tiefer als der Schwerpunkt der gedrückten Fläche.

Denkt man sich über den einzelnen sehr dünnen horizontalen Flächenstreifen a, b, ... einer vom Wasser gedrückten vertikalen Wand $AB = h$ (Fig. 144) Wasserprismen aa_1, bb_1, ... senkrecht gegen die Wand errichtet, deren Höhe gleich dem Abstande der Streifen vom Wasserspiegel ist, so stellen die Gewichte dieser Prismen den Druck auf den betreffenden Flächenstreifen dar. Die oberen Enden $a_1 b_1$ ... aller dieser Wasserprismen liegen in einer Ebene BC und es ist ABC $\left(= \frac{h^2}{2}\right)$ der Querschnitt eines Wasserprismas, welches den auf die ganze Wand AB wirkenden Druck darstellt.

Fig. 144.



Für ein Stück der Wand von der Tiefe $b = 1$ ergibt sich aus Gl. 168), wenn darin noch $F = h$ und $x_0 = \frac{h}{2}$ eingesetzt wird:

$$\mathbf{D} = \frac{\gamma \mathbf{h}^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 169)$$

Der Mittelpunkt des Druckes liegt mit dem Schwerpunkt des Dreiecks ABC in gleicher Höhe, also um $\frac{2}{3}$ h unter der Oberkante B.

Aufgabe 93. Wie groß ist der Druck D auf den Boden eines mit Wasser angefüllten Gefäßes, wenn die Bodenfläche $F = 3{,}2$ qm und die Wassertiefe $h = 1{,}5$ m beträgt?

Auflösung. Da 1 cbm Wasser $\gamma = 1000$ kg wiegt, so ist nach Gl. 167):

$$D = 3{,}2 \,.\, 1{,}5 \,.\, 1000 = 4800 \text{ kg}$$

Aufgabe 94. Welchen Druck hat eine 4 m hohe Wassermauer pro Meter Tiefe zu ertragen, wenn der Wasserspiegel mit der Oberkante der Mauer in gleicher Höhe liegt?

Auflösung. Nach Gl. 169) ist:

$$D = 1000 \cdot \frac{4^2}{2} = 8000 \text{ kg}$$

Aufgabe 95. In einem Schleusenthor befindet sich ein rechteckiger Schieber, dessen Höhe $= 0{,}8$ m und dessen Breite $= 0{,}6$ m beträgt. Die Oberkante des Schiebers liegt 1,2 m unter dem Wasserspiegel Wie groß ist der auf den Schieber wirkende Wasserdruck?

Auflösung. Die Fläche des Schiebers ist:

$$F = 0{,}8 \,.\, 0{,}6 = 0{,}48 \text{ qm}$$

Der Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche vom Wasserspiegel:

$$x_0 = 1{,}2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 = 1{,}6 \text{ m}$$

folglich nach Gl. 168):

$$D = 1000 \,.\, 0{,}48 \,.\, 1{,}6 = 768 \text{ kg}$$

§ 27.

Auftrieb. Absolutes, spezifisches, relatives Gewicht.

Bei einem in eine Flüssigkeit eingetauchten festen Körper erleidet jedes Teilchen der Oberfläche desselben einen Normaldruck. Dieser ist nach § 26 gleich einer Flüssigkeitssäule, welche das Flächenteilchen zur Grundfläche und den vertikalen Abstand desselben von der Oberfläche der Flüssigkeit zur Höhe hat. Zerlegt man die Drücke auf alle einzelnen Flächenteilchen in horizontale und vertikale Seitendrücke, so heben die ersteren sich gegenseitig auf, die letzteren dagegen nicht. Denn sind m und n (Fig. 145) zwei senkrecht übereinander liegende Flächenteilchen, so ist der nach oben gerichtete Vertikaldruck, den das Teilchen m erhält, um das Gewicht der Flüssigkeitssäule mn größer, als der nach unten gerichtete, auf das Teilchen n wirkende Vertikaldruck. Die Mittelkraft sämtlicher nach oben gerichteter Vertikaldrücke ist daher um das Gewicht der ganzen Flüssigkeitsmasse, welche gleiches Volumen mit dem eingetauchten Körper hat, größer als die Mittelkraft der nach unten gerichteten Vertikaldrücke.

Fig. 145.

Dieser Druckunterschied, d. i. die algebraische Summe der vertikalen Seitendrücke bildet eine aufwärts gerichtete Kraft, welche den eingetauchten Körper in die Höhe zu treiben sucht und **Auftrieb** genannt wird. Der Größe nach ist der Auftrieb gleich dem Gewichte der durch den eingetauchten Körper verdrängten Flüssigkeit; der Angriffspunkt desselben ist der Schwerpunkt S der verdrängten Wassermasse.

Da der Auftrieb eine dem Eigengewichte des Körpers entgegengesetzt gerichtete Kraft ist, so folgt aus dem Vorstehenden: **Ein in eine Flüssigkeit eingetauchter fester Körper verliert an Gewicht genau so viel, als das Gewicht der Flüssigkeit beträgt, welche er verdrängt.**

Bei einem **vollständig** eingetauchten Körper hat, wenn γ das Gewicht der Kubikeinheit der Flüssigkeit und V das Volumen des eingetauchten Körpers bedeutet, der Auftrieb die Größe:

$$\mathbf{A} = \gamma \mathbf{V} \qquad \ldots \qquad 170)$$

Ist γ_1 das Gewicht der Kubikeinheit des als homogen vorausgesetzten Körpers, so ist das absolute Gewicht desselben:

$$\mathbf{G} = \gamma_1 \mathbf{V} \qquad \ldots \qquad 171)$$

Man nennt das Verhältnis:

$$\frac{\mathbf{G}}{\mathbf{A}} = \frac{\gamma_1}{\gamma} = \mathbf{s} \qquad \ldots \qquad 172)$$

das spezifische Gewicht des Körpers in Bezug auf die Flüssigkeit, in welche er getaucht ist. Allgemein wird als Flüssigkeit Wasser von 4° C. verstanden. Unter dieser Annahme ist das spezifische Gewicht eines Körpers diejenige Zahl, welche angibt, wie viel mal so schwer der Körper ist, als ein gleich großes Volumen Wasser von 4°.

Das spezifische Gewicht des Wassers ist danach = 1.

Da 1 cbdcm Wasser 1 kg wiegt, so ist das spezifische Gewicht eines Körpers gleich dem absoluten Gewichte eines cbdcm desselben in kg oder gleich dem Gewichte eines cbcm in Gramm.

Nach Gl. 172) ist:

$$G = A s$$

und wenn man für A den Wert aus Gl. 170 einsetzt:

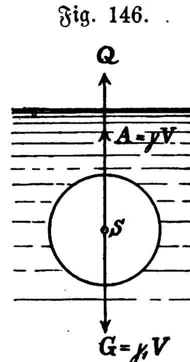
$$\mathbf{G} = \gamma \mathbf{V} \mathbf{s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 173)$$

d. h. das absolute Gewicht eines Körpers ist gleich dem Gewichte einer Wassermasse von gleichem Volumen, multipliziert mit dem spezifischen Gewichte des Körpers.

Ist das spezifische Gewicht des eingetauchten Körpers gleich dem spezifischen Gewichte des Wassers (= 1), so ist das absolute Gewicht desselben gleich dem Auftrieb, und der Körper befindet sich an jeder Stelle unterhalb der Oberfläche im Gleichgewicht.

Hat der Körper ein spezifisches Gewicht, welches kleiner als 1 ist, so wird er nur so weit im Wasser eingetaucht sein, daß das Gewicht des von ihm verdrängten Wassers seinem absoluten Gewichte gleich ist. Man sagt: der Körper schwimmt.

Fig. 146.



Bezeichnet man bei einem schwimmenden Körper das Volumen des eingetauchten Raumes mit V_1, so ist:

$$\mathbf{G} = \gamma \mathbf{V}_1 \quad \ldots\ldots \quad 174)$$

Aus Gl. 173) und 174) folgt dann:

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}} \quad \ldots\ldots \quad 175)$$

Ist der Körper schwerer als Wasser, so muß noch eine aufwärts gerichtete Kraft Q wirken, um denselben im Gleichgewichte zu halten (Fig. 146). Diese Kraft, welche man das relative oder scheinbare Gewicht des Körpers nennt, hat die Größe:

$$Q = G - A$$

oder wenn für A und G die Werte aus den Gleichungen 170) und 173) eingesetzt werden:

$$\mathbf{Q} = \gamma \mathbf{V} (\mathbf{s} - \mathbf{1}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 176)$$

Durch Wägung eines Körpers außerhalb des Wassers und im Wasser läßt sich das spezifische Gewicht desselben bestimmen. Durch Subtraktion der Gleichungen 173) und 176) folgt nämlich:

$$G - Q = \gamma V$$

und durch Division der Gl. 173) durch den letzten Ausdruck ergibt sich:

$$s = \frac{G}{G - Q} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 177)$$

Das spezifische Gewicht eines Körpers ist gleich dem absoluten Gewichte, dividiert durch die Differenz des absoluten und relativen Gewichtes desselben.

Besteht ein Körper aus einer Mischung zweier Stoffe von verschiedenen, aber bekannten spezifischen Gewichten, so läßt sich durch Wägung des Körpers außerhalb des Wassers und im Wasser das Volumen jedes der beiden Stoffe berechnen.

Ist V_1 das Volumen und s_1 das spezifische Gewicht des ersten Stoffes
V_2 „ „ „ s_2 „ „ „ „ zweiten „
so hat man, analog den Gleichungen 173) und 176):

$$G = \gamma V_1 s_1 + \gamma V_2 s_2$$
$$Q = \gamma V_1 (s_1 - 1) + \gamma V_2 (s_2 - 1)$$

Durch Auflösung für V_1 und V_2 folgt hieraus:

$$V_1 = \frac{Q - \left(1 - \frac{1}{s_2}\right) G}{\left(\frac{s_1}{s_2} - 1\right) \gamma} \quad \ldots\ldots \quad 178)$$

$$V_2 = \frac{Q - \left(1 - \frac{1}{s_1}\right) G}{\left(\frac{s_2}{s_1} - 1\right) \gamma} \quad \ldots\ldots \quad 179)$$

Liegt ein Körper, z. B. eine ebene Platte, deren Querschnittsfläche $= F$ sein möge, auf dem Boden eines mit Wasser gefüllten Gefäßes so vollständig auf, daß kein Wasser darunter gelangen kann (Fig. 147), so ist auch kein Auftrieb vorhanden, und die zum Emporziehen der Platte erforderliche Kraft hat dann die Größe:

Fig. 147.

$$K = G + \gamma F h \quad \ldots\ldots \quad 180)$$

Aufgabe 96. Der kubische Inhalt eines Gußstückes wurde zu 0,65 cbm berechnet. Was wiegt dasselbe, wenn das spezifische Gewicht des Gußeisens zu 7,2 angenommen wird?

Auflösung. (Gl. 173)

$$G = 1000 \,.\, 0{,}65 \,.\, 7{,}2 = 4680 \text{ kg}$$

Aufgabe 97. Ein prismatischer Holzbalken von 3 m Länge, 25 cm Breite, 16 cm Dicke wurde mit seiner breiten Seitenfläche ins Wasser gelegt und sank so tief ein, daß sich seine Oberkante noch 5 cm über dem Wasserspiegel befand. Wie groß ist das spezifische Gewicht desselben?

Auflösung. (Gl. 175)

$$s = \frac{V_1}{V} = \frac{3 \cdot 0{,}25 \cdot (0{,}16 - 0{,}05)}{3 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}16} = \frac{11}{16} = 0{,}6875$$

Aufgabe 98. Ein Stück Blei wiegt außerhalb des Wassers 10 kg. Wie groß ist das relative Gewicht desselben, wenn das spezifische Gewicht des Bleies zu 11,4 angenommen wird?

Auflösung. Nach Gl. 177) ist:

$$Q = G\left(1 - \frac{1}{s}\right) = 10\left(1 - \frac{1}{11{,}4}\right) = 9{,}123 \text{ kg}$$

Aufgabe 99. Ein Maschinenteil aus Messing (Legierung aus Kupfer und Zink) wog in der Luft $G = 100$ kg, im Wasser $Q = 87{,}8$ kg. Wie viel Kupfer (spez. Gew. $s_1 = 8{,}8$) und wie viel Zink (spez. Gew. $s_2 = 7{,}0$) enthält derselbe?

Auflösung. Nach den Gleichungen 178) und 179) ist:

$$V_1 = \frac{87{,}8 - \left(1 - \frac{1}{7}\right)100}{\left(\frac{8{,}8}{7} - 1\right)1000} = 0{,}0081$$

$$V_2 = \frac{87{,}8 - \left(1 - \frac{1}{8{,}8}\right)100}{\left(\frac{7}{8{,}8} - 1\right)1000} = 0{,}0041$$

Den Werten V_1 und V_2 entsprechend ergeben sich dann die Gewichte nach Gl. 173) zu:

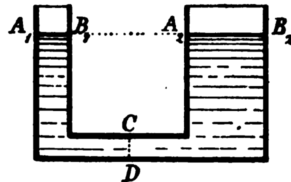
$$G_1 = 1000 \cdot 0{,}0081 \cdot 8{,}8 = 71{,}3 \text{ kg Kupfer}$$
$$G_2 = 1000 \cdot 0{,}0041 \cdot 7 \quad = 28{,}7 \text{ kg Zink.}$$

§ 28.

Kommunizierende Röhren.

Zwei Gefäße, welche so miteinander in Verbindung stehen, daß Flüssigkeiten frei von dem einen in das andere gelangen können, nennt man kommunizierende Röhren. Die Gefäße können dabei nebeneinander liegen und durch ein besonderes Rohr miteinander verbunden sein (Fig. 148 und 150), oder das eine weitere Gefäß umschließt das engere (Fig. 149).

Fig. 148.



Enthalten die kommunizierenden Röhren die gleiche Flüssigkeit, z. B. Wasser, so steht dieselbe in beiden Schenkeln gleich hoch, und die Oberflächen $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ (Fig. 148) liegen in einer Horizontalen. Die Flüssigkeit kann sich natürlich nur dann im Gleichgewichte befinden, wenn ein beliebiger Querschnitt C D des Verbindungsrohres zu beiden Seiten den gleichen Druck erhält. Dies geschieht, wenn der

Flüssigkeitsspiegel in beiden Schenkeln die gleiche Höhe über dem Schwerpunkt des Querschnittes CD hat.

Enthalten die kommunizierenden Röhren ungleichartige Flüssigkeiten von verschiedenem spezifischen Gewichte, so steht im Gleichgewichtszustande die leichtere Flüssigkeit in dem einen Schenkel höher, als die schwerere in dem anderen Schenkel. Sind s_1 und s_2 die spezifischen Gewichte der Flüssigkeiten, h_1 und h_2

Fig. 149.

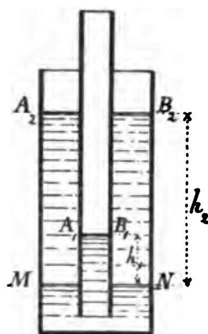
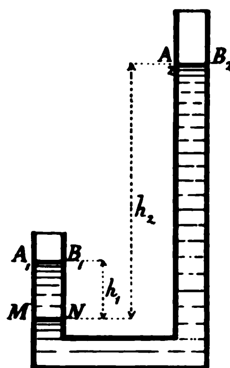


Fig. 150.



die Höhen der Oberflächen derselben über der Trennungsfläche $MN = F$ (Fig. 149 und 150), so ist, da diese von beiden Seiten gleichen Druck erhalten muß, nach Gl. 173)

$$\gamma F h_1 s_1 = \gamma F h_2 s_2$$

oder:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{s_2}{s_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 181)$$

Die Höhen der Flüssigkeitsoberflächen über der Trennungsfläche verhalten sich umgekehrt, wie die spezifischen Gewichte der Flüssigkeiten.

Dieses Gesetz hat keine Gültigkeit für sehr enge Röhren, sogen. Haarröhrchen (vergl. 7 § 2).

Die kommunizierenden Röhren finden u. a. Anwendung zu Nivellierinstrumenten.

Abschnitt V.

Die Lehre von der Bewegung (Dynamik) tropfbar flüssiger Körper.

§ 29.

Ausfluß des Wassers aus Gefäßen.

Für frei herabfallendes Wasser gelten dieselben Gesetze, wie für frei fallende feste Körper.

Ist Q die pro sec zuströmende Wassermenge in cbm (also 1000 Q deren Gewicht in kg, $\frac{1000\,Q}{g}$ deren Masse), h die Gefällhöhe und v die Ge-

Fig. 151.

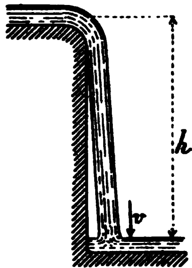
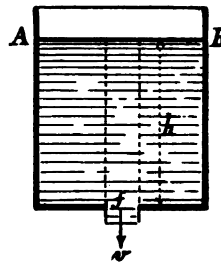


Fig. 152.



schwindigkeit, mit welcher das Wasser unten ankommt (Fig. 151), so ist nach Gl. 21) S. 22:

$$1000\,Q\,h = \frac{1000\,Q}{g}\,\frac{v^2}{2}$$

woraus folgt:

$$\mathbf{h = \frac{v^2}{2g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 182)$$

oder:

$$\mathbf{v = \sqrt{2gh}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 183)$$

Ist das Wasser in einem cylindrischen Gefäße eingeschlossen (Fig. 152) und würde dessen Boden plötzlich entfernt, so wird die ganze Wassermasse ebenfalls frei herabfallen und die obere Wasserschicht A B unten mit der der Fallhöhe h entsprechenden Geschwindigkeit $v = \sqrt{2\,g\,h}$ ankommen.

Wird nicht der ganze Boden, sondern nur ein Teil desselben vom Querschnitt f plötzlich entfernt, so kann nur die darüber befindliche Wassersäule frei herabfallen, und diejenigen Wasserteilchen dieser Säule, die vorher an der Ober-

fläche sich befanden, werden unten mit der Geschwindigkeit v ankommen. Wenn nun durch seitlichen Zufluß dafür gesorgt wird, daß die Druckhöhe h konstant bleibt, so haben auch bei längere Zeit dauerndem Ausfluß sämtliche unten ankommenden Wasserteilchen die Höhe h durchfallen und es ist deshalb die theoretische Ausflußgeschwindigkeit: $v = \sqrt{2gh}$ und danach die durch den Querschnitt f pro sec ausfließende Wassermenge:

$$Q = f\sqrt{2gh} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 184)$$

Befindet sich die Ausflußöffnung nicht am Boden, sondern an der Seite des Gefäßes (Fig. 153), so sind die Druckhöhen für die verschiedenen Punkte der Oeffnung und damit auch die Geschwindigkeiten der ausfließenden Wasserteilchen verschieden.

Ist die Höhe der Seitenöffnung verhältnismäßig klein, so weichen die Geschwindigkeiten nicht viel voneinander ab, und man kann zur Berechnung

Fig. 153.

Fig. 154.

der pro sec ausfließenden Wassermenge (nach Gl. 184) genügend genau die Entfernung des Schwerpunktes der Ausflußöffnung vom Wasserspiegel als konstante Druckhöhe h annehmen.

Bei größerer Höhe der seitlichen Ausflußöffnung denke man sich die ganze Querschnittsfläche des austretenden Wasserstrahles in sehr viele horizontale Streifen von der sehr kleinen Höhe Δ zerlegt (Fig. 154). Für einen Streifen in der Tiefe y unter dem Wasserspiegel ist dann die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2gy}$$

und, unter Voraussetzung einer rechteckigen Ausflußöffnung von der Breite b, die durch diesen Querschnittsstreifen ausfließende Wassermenge:

$$y = b\Delta\sqrt{2gy} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 185)$$

Die durch die ganze Oeffnung austretende Wassermenge ist danach:

$$Q = \Sigma\,(b\Delta\sqrt{2gy}) = b\,\Sigma\,(\sqrt{2gy}\,\Delta) \quad \ldots \quad 186)$$

Denkt man sich nun ferner die durch die einzelnen Querschnittsstreifen ausfließenden Wassermengen q als horizontale Prismen mit ihren einen Endpunkten senkrecht übereinander gelegt, so liegen, da sich nach Gl. 185) die einzelnen Wassermengen verhalten, wie die Quadratwurzeln aus den zugehörigen

Druckhöhen, die anderen Endpunkte derselben in einer Parabel mit dem Scheitel in A (Fig. 154). Die ganze ausfließende Wassermenge Q ist danach gleich einem Prisma vom Querschnitt BCDE.

Es ist aber nach Fig. 154:

$$BCDE = ADE - ACB$$

und da eine Parabelfläche bekanntlich $= \frac{2}{3}$ der aus Sehne und Höhe konstruierten Rechteckfläche ist, so wird:

$$BCDE = \frac{2}{3} AFDE - \frac{2}{3} AGCB$$

oder:

$$\Sigma (\sqrt{2 g y}\, \Delta) = \frac{2}{3} H \sqrt{2 g H} - \frac{2}{3} H_1 \sqrt{2 g H_1}$$

Danach ergibt sich nach Gl. 186) die ganze ausfließende Wassermenge zu:

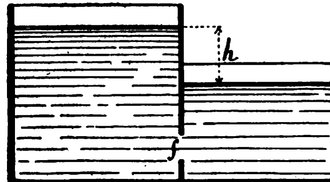
$$\mathbf{Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2 g} (H \sqrt{H} - H_1 \sqrt{H_1})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 187)$$

worin b die Breite der Ausflußöffnung, H die Tiefe der Unterkante, H_1 die der Oberkante unter dem Wasserspiegel bedeutet.

Für $H_1 = 0$, d. h. wenn die Oberkante der Ausflußöffnung mit dem Oberwasserspiegel abschneidet, folgt aus Gl. 187:

$$\mathbf{Q = \frac{2}{3} b H \sqrt{2 g H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 188)$$

Fig. 155.



Bei einer Ausflußöffnung unter Wasser (Fig. 155) ist zur Berechnung von Q als Druckhöhe der vertikale Abstand h der Wasserspiegel der beiden angrenzenden Gefäße in Gl. 184) einzusetzen.

Die wirklich durchfließende Wassermenge weicht von der theoretischen mehr oder weniger ab. Dies hat seinen Grund darin, daß durch das von den Seiten schief nach der Ausflußöffnung sich drängende Wasser einerseits die Ausflußgeschwindigkeit vermindert wird, andererseits nicht der volle Querschnitt der Oeffnung zur Geltung kommt, sondern der austretende Wasserstrahl zusammengezogen (kontrahiert) wird.

Um die wirklich austretende Wassermenge zu erhalten, sind daher die in den Gleichungen 184), 187), 188) angegebenen Werte noch mit einem sogen. Ausflußkoeffizienten μ zu multiplizieren, der, je nachdem die Kontraktion vollkommen oder unvollkommen ist, verschieden groß anzunehmen ist.

Die Kontraktion ist **vollkommen**, wenn die Ausflußöffnung am ganzen Umfange mit von außen her zugeschärfter Kante versehen ist, und wenn zugleich die Weite der Oeffnung im Verhältnis zum Abstande von der nächstliegenden Gefäßkante und zur Druckhöhe gering ist. In diesem Falle kann man den Ausflußkoeffizienten erfahrungsgemäß annehmen zu:

$$\mu = \mathbf{0{,}62} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 189)$$

Die Kontraktion ist **unvollkommen**, wenn eine oder mehrere Seiten der Ausflußöffnung Fortsetzungen der Gefäßwände bilden. Bezeichnet man den Koeffizienten für unvollkommene Kontraktion mit μ_1 und ist U der ganze Umfang der Ausflußöffnung, n U derjenige Teil des Umfangs, welcher keine Kontraktion bewirkt, so ist zu setzen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für rechteckige Oeffnungen:} & \mu_1 = (1 + 0{,}15\,n)\,\mu \\ \text{„ runde „} & \mu_1 = (1 + 0{,}13\,n)\,\mu \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 190)$$

Danach ist folgende Tabelle berechnet:

Für n =	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	
wird μ_1 =	0,643	0,667	0,690	bei rechteckiger Oeffnung
„ μ_1 =	0,640	0,660	0,680	bei runder Oeffnung

Bei Anwendung eines kurzen konischen Abflußrohres mit gut abgerundeten Kanten, dessen oberer Durchmesser d sich nach unten allmählich verjüngt und im Abstande 0,5 d vom Gefäßboden nur noch 0,8 d beträgt (Fig. 156), findet keine weitere Kontraktion des ausfließenden Wasserstrahles statt. Der Ausflußkoeffizient hat in diesem Falle die Größe:

Fig. 156.

$$\mu = \mathbf{0{,}96} \quad \ldots \quad 191)$$

Danach ist, wenn der dem Durchmesser 0,8 d entsprechende Querschnitt des Rohres mit f bezeichnet wird, die wirkliche pro sec ausfließende Wassermenge:

$$\mathbf{Q = 0{,}96\, f \sqrt{2\,g\,h}} \quad \ldots \quad 192)$$

Aufgabe 100. Welche Wassermenge Q fließt in einer Minute aus einer am Boden eines Gefäßes angebrachten Oeffnung von f = 8 qcm Querschnitt bei einer konstanten Druckhöhe h = 2,5 m, wenn vollkommene Kontraktion angenommen wird?

Auflösung. Die theoretische Wassermenge ist nach Gl. 184):

$$Q = 60 \,.\, 0{,}0008 \sqrt{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 2{,}5} = 0{,}336 \text{ cbm}$$

folglich bei $\mu = 0{,}62$ (Gl. 189) die wirklich ausfließende Wassermenge:

$$\mu\, Q = 0{,}62 \,.\, 0{,}336 = 0{,}20832 \text{ cbm}$$

Aufgabe 101. Die Unterkante eines 1,4 m breiten Schützen sei 0,16 m vom Gerinnboden entfernt. Wie groß ist die pro Sekunde durchströmende Wassermenge, wenn die Höhe des Oberwasserspiegels über dem Gerinnboden 1,2 m beträgt?

Auflösung. Der ganze Umfang der Ausflußöffnung ist:

$$U = 2 . 0{,}16 + 2 . 1{,}4 = 3{,}12 \text{ m}$$

An beiden Seiten und am Boden findet keine Kontraktion statt, folglich

$$n U = 2 . 0{,}16 + 1{,}4 = 1{,}72 \text{ m}$$

Durch Division beider Ausdrücke ergiebt sich:

$$n = \frac{1{,}72}{3{,}12} = 0{,}55$$

Bei $\mu = 0{,}62$ wird dann nach Gl. 190)

$$\mu_1 = (1 + 0{,}15 . 0{,}55)\, 0{,}62 = 0{,}67$$

Durch Einsetzung der Werte: $b = 1{,}4$ m; $H = 1{,}2$ m; $H_1 = 1{,}2 - 0{,}16 = 1{,}04$ m ergibt sich die theoretische Wassermenge aus Gl. 187) zu:

$$Q = \frac{2}{3} \cdot 1{,}4 . \sqrt{2 . 9{,}81}\left(1{,}2 \sqrt{1{,}2} - 1{,}04 \sqrt{1{,}04}\right) = 1{,}0748 \text{ cbm}$$

daher die wirklich ausfließende Wassermenge:

$$\mu_1 Q = 0{,}67 . 1{,}0748 = 0{,}7194 \text{ cbm}$$

Die Annäherungsrechnung (Gl. 184) würde ergeben:

$$\mu_1 Q = 0{,}67 . 0{,}16 . 1{,}4 \sqrt{2 . 9{,}81\left(1{,}2 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}16\right)}$$

$$\mu_1 Q = 0{,}67 . 0{,}224 . 4{,}69 = 0{,}7039 \text{ cbm}$$

§ 30.

Bewegung des Wassers in Röhren und Kanälen.

Fließt Wasser durch eine längere Rohrleitung, so erleidet es durch die Reibung an den Rohrwänden einen Verlust an Geschwindigkeit. Von der totalen Druckhöhe h geht daher ein Teil h_1 für die Geschwindigkeit verloren und wird aufgewandt zur Ueberwindung der Reibung; der Rest $(h - h_1)$ bleibt zur Erzeugung der Geschwindigkeit v. Es ist daher:

$$h - h_1 = \frac{v^2}{2g}$$

oder:

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{v}^2}{2\mathbf{g}} + \mathbf{h}_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 193)$$

h_1 wird um so größer, je länger das Rohr und je kleiner dessen Durchmesser ist, und wächst erfahrungsgemäß proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit. Bezeichnet man die Länge der Rohrleitung mit l, den Durchmesser der-

selben mit d, so kann für gußeiserne Rohre bei mittleren Geschwindigkeiten angenommen werden*):

$$h_1 = 0{,}024 \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 194)$$

Durch Einsetzung dieses Ausdruckes in Gl. 193 erhält man:

$$h = \frac{v^2}{2g}\left(1 + 0{,}024 \frac{l}{d}\right)$$

und daraus:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + 0{,}024 \frac{l}{d}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 195)$$

Ein Kanal wird stets mit Gefälle angelegt, d. h. die Kanalsohle ist gegen den Horizont geneigt, bildet also eine schiefe Ebene, über welche das Wasser ohne Berücksichtigung der Reibung mit beschleunigter Bewegung hinabgleiten würde. Durch die Reibung am Boden und an den Seitenwänden des Kanals entsteht aber ein Widerstand, welcher verzögernd auf die Bewegung des Wassers einwirkt und proportional mit dem Quadrate der Geschwindigkeit wächst, so daß bei konstantem Gefälle und konstantem Kanalquerschnitt die Bewegung für eine gewisse Geschwindigkeit gleichförmig wird.

Ist F der Wasserquerschnitt im Kanale, v die mittlere Geschwindigkeit, so erhält man die in einer Sekunde durchströmende Wassermenge aus der Gleichung:

$$Q = F v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 196)$$

Die Geschwindigkeit ist nicht in allen Punkten desselben Querschnitts die gleiche; sie ist am größten in der Mitte des Kanals etwas unter der Oberfläche, und nimmt von dort nach dem Boden und nach den Seiten hin ab. Praktisch wird die Geschwindigkeit am sichersten gemessen mit dem Voltmannschen Flügel; einfacher, aber unsicherer mit einem Schwimmer. Zur theoretischen Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit v sind verschiedene Formeln aufgestellt, von denen die gebräuchlichste wohl die Formel von Bazin ist. Diese lautet:

$$\frac{h}{l} = v^2\left(\alpha + \beta \frac{U}{F}\right) \frac{U}{F} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 197)$$

Hierin bedeutet:

---

*) Allgemein ist:

$$h_1 = k \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

worin nach Weißbach zu setzen ist:

$$k = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}}$$

Für v = 1 m entsteht:

$$k = 0{,}0238611$$

oder abgerundet, wie oben in Gl. 194):

$$k = 0{,}024$$

l die Länge des Kanals } $\frac{h}{l}$ das Gefälle des Kanals
h die Gefällhöhe des Kanals
F den Wasser führenden Kanalquerschnitt
U den benutzten Umfang des Kanalquerschnittes

Für α und β sind je nach dem Materiale, aus dem der Kanal hergestellt ist, verschiedene Werte einzusetzen, und zwar:

$\alpha = 0{,}00015$; $\beta = 0{,}0000045$ für Holz und abgeriebenen Cement
$\alpha = 0{,}00019$; $\beta = 0{,}0000133$ „ Quader und Ziegel
$\alpha = 0{,}00024$; $\beta = 0{,}00006$ „ Bruchsteinmauerwerk
$\alpha = 0{,}00028$; $\beta = 0{,}00035$ „ Erde

Das Kanalprofil muß so angeordnet werden, daß der Gefällverlust möglichst gering ist. Da dieser nun abhängt vom Reibungswiderstande, welcher

Fig. 157.



wieder proportional dem benetzten Umfang ist, so ist die Bedingung einer günstigen Anlage, daß der benetzte Umfang U ein Minimum wird.

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn man setzt (Fig. 157):

$$t = \sqrt{\frac{F \sin \varphi}{2 - \cos \varphi}}; \qquad b = t\, 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

Danach ist für verschiedene Böschungswinkel δ folgende Tabelle berechnet:

Böschungswinkel $\delta =$	Wassertiefe $t =$	Breite der Kanalsohle $b =$	Benetzter Umfang $U =$	
90°	$0{,}707 \sqrt{F}$	$1{,}414 \sqrt{F}$	$2{,}828 \sqrt{F}$	für Holz
60°	$0{,}76 \sqrt{F}$	$0{,}877 \sqrt{F}$	$2{,}632 \sqrt{F}$	„ Futtermauern
45°	$0{,}74 \sqrt{F}$	$0{,}613 \sqrt{F}$	$2{,}704 \sqrt{F}$	„ Erde mit Uferdeckung
30°	$0{,}664 \sqrt{F}$	$0{,}536 \sqrt{F}$	$3{,}012 \sqrt{F}$	„ „ ohne „

Aufgabe 102. Von einem größeren Bassin aus wird Wasser durch eine 6000 m lange Rohrleitung nach einem Punkte geführt, welcher 16 m tiefer liegt als der Wasserspiegel des Bassins. Wie groß ist die Ausflußgeschwindigkeit v, wenn der Durchmesser des Rohres 20 cm beträgt, und wie viel Wasser fließt danach in der Minute aus?

Auflösung. Nach Gl. 195) ist:

$$v = \sqrt{\frac{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 16}{1 + 0{,}024 \frac{6000}{0{,}2}}} = 0{,}66 \text{ m}$$

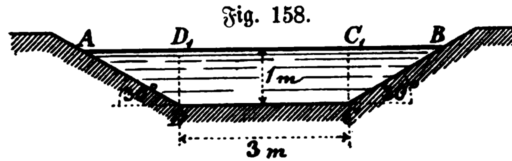
folglich: $$Q = 60 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot v = 60 \cdot \frac{0{,}2^2 . 3{,}14}{4} \cdot 0{,}66 = 1{,}244 \text{ cbm}$$

Ohne Reibungswiderstände würde sich ergeben:

$$v = 17{,}72; \qquad Q = 33{,}4 \text{ cbm}$$

Aufgabe 103. Ein Kanal ist mit einem Gefälle $\frac{h}{l} = \frac{1}{1500}$ angelegt und in Erde ausgeführt. Die Breite der Kanalsohle ist $= 3$ m, der Böschungswinkel

Fig. 158.



$\delta = 30^0$, und die Wassertiefe im Kanal $t = 1$ m. Es soll die Geschwindigkeit v und die pro Sekunde durchfließende Wassermenge Q berechnet werden.

Auflösung. Nach Fig. 158 ist:

$$AD = BC = 2 \text{ m}$$
$$AD_1 = BC_1 = \sqrt{2^2 - 1} = 1{,}732 \text{ m}$$

Danach wird:

$$F = (3 + 1{,}732) . 1 = 4{,}732 \text{ qm}$$
$$U = AD + DC + CB = 2 + 3 + 2 = 7 \text{ m}$$

Durch Einsetzung dieser Werte in Gl. 197) ergibt sich bei $\alpha = 0{,}00028$, $\beta = 0{,}00035$ (für Erde):

$$\frac{1}{1500} = v^2 \left(0{,}00028 + 0{,}00035 \frac{7}{4{,}732}\right) \frac{7}{4{,}732}$$

und daraus: $v^2 = 1{,}776$ oder $v = 1{,}332$ m

Die pro Sekunde durchfließende Wassermenge ist dann:

$$Q = 4{,}732 . 1{,}332 = 6{,}3 \text{ cbm}$$

Aufgabe 104. Es soll ein Kanal in Bruchstein angelegt werden von 2000 m Länge, welcher pro sec eine Wassermenge $Q = 4{,}8$ cbm bei einer Geschwindigkeit $v = 1{,}2$ m zu liefern im stande ist. Es soll der Kanalquerschnitt festgestellt und das erforderliche Gefälle berechnet werden.

Auflösung. Der Wasserquerschnitt hat die Größe:

$$F = \frac{Q}{v} = \frac{4{,}8}{1{,}2} = 4 \text{ qm}$$

Nach der Tabelle S. 143 ist für $\delta = 60^0$:

die Wassertiefe: $t = 0{,}76 \sqrt{4} = 1{,}52$ m

die Breite der Kanalsohle: $b = 0{,}877 \sqrt{4} = 1{,}754$ m

der benetzte Umfang: $U = 2{,}632 \sqrt{4} = 5{,}264$ m

Setzt man die Werte von v, F, U und außerdem $\alpha = 0{,}00024$; $\beta = 0{,}00006$ für Bruchstein) in die Gl. 197) ein, so ergibt sich:

$$\frac{h}{l} = 1{,}2^2 \left(0{,}00024 + 0{,}00006 \frac{5{,}264}{4}\right) \frac{5{,}264}{4} = \backsim \frac{1}{1650}$$

Die ganze Gefällhöhe des Kanals beträgt demnach:

$$h = \frac{2000}{1650} = \backsim 1{,}2 \text{ m}$$

§ 31.

Stoß des Wassers.

Unter dem Stoß eines Wasserstrahles versteht man das Aufprallen desselben auf eine senkrecht oder schief gegen seine Bewegung gerichtete Fläche, wobei das Wasser einen Teil seiner Geschwindigkeit verliert. Die getroffene Fläche kann sich dabei in Ruhe befinden oder selbst in Bewegung begriffen sein.

Der Stoß ist infolge der Unzusammendrückbarkeit des Wassers vollkommen unelastisch.

Wird mit m_1 die Masse eines stoßenden Wasserteilchens, mit M_2 die Masse der senkrecht getroffenen ebenen Fläche bezeichnet, so ist bei gleichgerichteten Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der Arbeitsverlust, den ein Wasserteilchen durch den Stoß erleidet, nach Gl. 151) S. 121:

$$a_2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 M_2}{m_1 + M_2} (v_1 - v_2)^2$$

Hierin kann der Nenner $m_1 + M_2$ wegen Kleinheit von m_1 gegenüber M_2 genügend genau $= M_2$ angenommen werden. Es wird dann:

$$a_2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1 - v_2)^2$$

Der Arbeitsverlust für die ganze stoßende Wassermasse ist gleich der Summe der Arbeitsverluste der einzelnen Wasserteilchen, und beträgt danach, wenn $\Sigma (m_1) = M_1$ gesetzt wird:

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{2} M_1 (v_1 - v_2)^2$$

Diese Größe ist von der Differenz der lebendigen Kräfte des Wassers vor und nach dem Stoße in Abzug zu bringen, um die an die gestoßene Fläche abgegebene Arbeit L zu erhalten. Es wird daher die Leistung des Stoßes:

$$L = \frac{M_1 v_1^2}{2} - \frac{M_1 v_2^2}{2} - \frac{1}{2} M_1 (v_1 - v_2)^2$$

$$L = M_1 v_2 (v_1 - v_2)$$

oder, wenn die pro sec zum Stoß gelangende Wassermenge mit Q, das Gewicht eines cbm Wassers mit γ (= 1000 kg) bezeichnet wird:

$$\mathbf{L = \gamma \frac{Q}{g} (v_2 v_1 - v_2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 198)$$

Der vom Wasser auf die Fläche ausgeübte Druck D ergibt sich nach Gl. 20) S. 22 aus der Beziehung zwischen mechanischer Arbeit und lebendiger Kraft:

$$D v_2 = L = \gamma \frac{Q}{g} v_2 (v_1 - v_2)$$

zu:

$$\mathbf{D = \gamma \frac{Q}{g} (v_1 - v_2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 199)$$

für den Fall, daß die gestoßene Fläche sich in Ruhe befindet (v_2 = Null) wird:

$$D = \gamma \frac{Q}{g} v_1 \quad \ldots\ldots \quad 200)$$

Ist F der Querschnitt der Fläche, so nimmt durch Einsetzung von:

$$Q = F v_1$$

die Gleichung 200) die Form an:

$$D = 2 \gamma F \frac{v_1^2}{2 g} = 2 \gamma F h \quad \ldots\ldots \quad 201)$$

Die Leistung des Stoßes wird nach Gl. 198) ein Maximum für:

$$v_2 = 0{,}5\, v_1 \quad \ldots\ldots \quad 202)$$

und hat für diesen Fall dann die Größe:

$$L_{max} = \gamma \frac{Q}{2} \frac{v_1^2}{2 g} = \gamma \frac{Q h}{2} \quad \ldots\ldots \quad 203)$$

Erfolgt der Stoß nicht durch einen geschlossenen Wasserstrahl, sondern im offenen unbegrenzten Wasser, so fällt der Druck D gegen die Fläche F kleiner aus, als in Gl. 201) angegeben. Es wird alsdann:

$$D = k \gamma F \frac{v_1^2}{2 g} \quad \ldots\ldots \quad 204)$$

worin k einen Erfahrungskoeffizienten bedeutet.

Für eine dünne, senkrecht gegen die Stromrichtung gehaltene, unbewegliche Platte ist: k = 1,86.

Bewegt sich dagegen die Platte in ruhendem Wasser mit der Geschwindigkeit v_1, so ist: k = 1,25.

Abschnitt VI.

Die Lehre vom Gleichgewicht gasförmiger Körper (Aerostatik).

§ 32.

Aerostatische Gesetze.

Die Gesetze, welche bei dem Gleichgewicht der tropfbar flüssigen Körper im Abschnitt IV abgeleitet wurden, nämlich:

1) Der auf eine Flüssigkeit ausgeübte Druck pflanzt sich nach allen Richtungen gleichmäßig fort (§ 25);
2) Der Druck einer schweren Flüssigkeit auf eine Fläche ist gleich dem Gewichte der auf dieser Fläche ruhenden Flüssigkeitssäule (§ 26);
3) Ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper verliert an Gewicht genau so viel, als das Gewicht der Flüssigkeit beträgt, welche er verdrängt (§ 27);

4) Die Höhen zweier Flüssigkeitssäulen über der Trennungsfläche derselben in den Schenkeln kommunizierender Röhren verhalten sich umgekehrt, wie die spezifischen Gewichte der Flüssigkeiten (§ 28)

gelten auch für die gasförmigen oder elastischen Flüssigkeiten. Es treten aber, hauptsächlich verursacht durch die Fähigkeit der gasförmigen Körper, sich verhältnismäßig leicht zusammendrücken zu lassen, bei diesen zum Teil ganz andere Erscheinungen auf, als bei den tropfbar flüssigen Körpern.

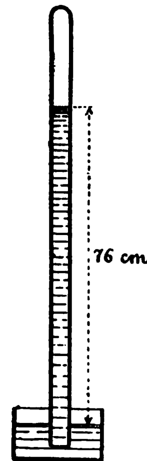
Infolge des Bestrebens der gasförmigen Körper, sich immer weiter auszudehnen, übt eine Gasmasse auf die Wände eines Gefäßes, in welchem sie eingeschlossen ist, einen Druck aus, den man Spannkraft oder Expansivkraft nennt. Im Vergleich zu dieser Kraft ist der Druck, welchen das Gas infolge seiner Schwere auf die Gefäßwände ausübt, so unmerklich klein, daß er vernachlässigt werden kann.

§ 33.

Druck der atmosphärischen Luft. Barometer. Manometer.

Die Größe der Expansivkraft eines Gases gibt man entweder durch ein Gewicht an, welches auf die Flächeneinheit einen ebenso großen Druck ausübt als das Gas, oder durch die Höhe einer Flüssigkeitssäule (Quecksilber oder Wasser), welche in dem einen oben geschlossenen Schenkel einer kommunizierenden Röhre dem Drucke des Gases auf die Oberfläche der Flüssigkeit in dem anderen Schenkel das Gleichgewicht hält.

Fig. 159.



Füllt man (Fig. 159) eine an einem Ende zugeschmolzene Glasröhre, deren Länge größer als 76 cm sein muß, sonst aber beliebig sein kann, mit Quecksilber, verschließt dann das offene Ende, z. B. mit dem Finger, kehrt die Röhre um, taucht das verschlossen gehaltene Ende in ein mit Quecksilber gefülltes Gefäß und zieht hierauf den Finger zurück, so bleibt in der Glasröhre eine Quecksilbersäule von ca. 76 cm über der Oberfläche des Quecksilbers in dem Gefäße stehen, und über dieser Quecksilbersäule befindet sich in der Glasröhre ein luftleerer Raum. (Versuch von Torricelli.)

Eine solche Einrichtung, transportabel und mit Skala versehen, so daß man die Höhe der Quecksilbersäule bequem ablesen kann, heißt Barometer (Schweremesser); die Höhe der Quecksilbersäule nennt man den Barometerstand.

Die Quecksilbersäule von ca. 76 cm Höhe wird durch den Druck der atmosphärischen Luft auf die freie Oberfläche des Quecksilbers im Gleichgewicht gehalten. Da nun das spezifische Gewicht des Quecksilbers = 13,59 ist, so hat danach der Luftdruck pro qcm die Größe:

$$p_0 = 76 \cdot 13{,}59 = 1033 \text{ g}$$

oder:

$$p_0 = 1{,}033 \text{ kg} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 205)$$

Obgleich diese Größe je nach der Höhe des Ortes veränderlich, außerdem auch noch abhängig von der geographischen Breite, von der Temperatur und dem Feuchtigkeitsgehalte der Luft ist, so wird sie in der Mechanik doch als konstant betrachtet und bei Druckbestimmungen unter dem Namen Atmosphäre als Einheit angenommen. Abgerundet ist daher:

1 Atmospäre = 1 kg pro qcm

Da eine Quecksilbersäule von 0,76 m Höhe im Gleichgewichte gehalten wird durch eine Wassersäule von: 0,76 . 13,59 = 10,33 m, so läßt sich der Atmosphärendruck auch definieren als:

der Druck einer Quecksilbersäule von 0,76 m Höhe

oder:

der Druck einer Wassersäule von 10,33 m Höhe.

Das Manometer, welches dazu dient, den Druck von Gasen und Dämpfen zu messen, unterscheidet sich von dem Barometer im Prinzipe nur dadurch, daß auf die Oberfläche des Quecksilbers im Gefäße nicht der Druck der freien Atmosphäre wirkt, sondern die Spannkraft p des in dem Behälter A eingeschlossenen Gases oder Dampfes (Fig. 160).

Das Hebermanometer (Fig. 161) besteht aus einer zum Teil mit Quecksilber angefüllten kommunizierenden Röhre, deren einer Schenkel oben offen ist,

Fig. 160.

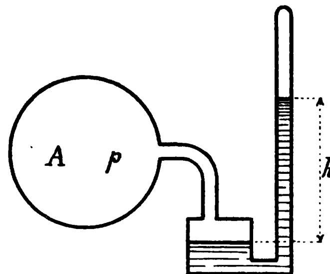
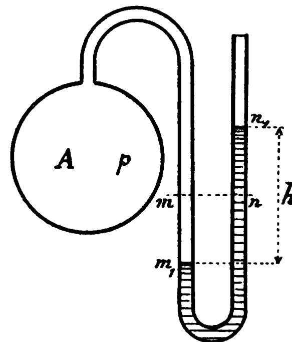


Fig. 161.



während der andere Schenkel mit dem Gasbehälter A in Verbindung steht. Ist der Druck im Behälter A gleich dem Druck der äußeren Luft, so liegt der Quecksilberspiegel in beiden Schenkeln in einer Horizontalen m n. Vergrößert sich nun die Spannung des Gases im Behälter, so sinkt das Quecksilber in dem einen Schenkel der Röhre um das Maß $m m_1$, und steigt zugleich in dem andern Schenkel um das Maß $n n_1$. Der Ueberdruck des Gases über den

Druck der äußeren atmosphärischen Luft wird danach gemessen durch die Quecksilbersäule von der Höhe:

$$h = m m_1 + n n_1$$

Bei größeren Drücken würden die Quecksilbermanometer sehr hoch ausgeführt werden müssen und dadurch schwerfällig werden; man verwendet in solchen Fällen dann passender die Metallmanometer.

Aufgabe 105. Wie groß, in Atmosphären ausgedrückt, ist der Druck auf den Kolben einer Druckpumpe, über welchem eine Wassersäule von 50 m steht?

Auflösung.

$$n = \frac{50}{10,33} = 4,84 \text{ Atm.}$$

Aufgabe 106. Der 25 cm Durchmesser haltende Kolben eines Accumulators ist beschwert durch ein Gewicht von 200 000 kg. Wie viel Atmosphären Druck werden dadurch erzeugt?

Auflösung. Die Querschnittsfläche des Kolbens ist:

$$F = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{25^2 . 3,14}{4} = 491 \text{ qcm}$$

folglich:

$$n = \frac{200\,000}{491} = 407 \text{ Atm.}$$

Aufgabe 107. Welche Höhe muß eine Weingeistsäule (spez. Gew. = 0,8) haben, um einer 0,76 m hohen Quecksilbersäule (spez. Gew. = 13,59) das Gleichgewicht zu halten?

Auflösung.

$$h = 0,76 \cdot \frac{13,59}{0,8} = 12,91 \text{ m}$$

Aufgabe 108. An einem Gasbehälter A ist ein mit Quecksilber gefülltes Hebermanometer (Fig. 161) angebracht, bei welchem man h = 45,6 cm mißt. Wie groß ist danach der Gasdruck p in dem Behälter?

Auflösung.

$$p = \frac{45,6}{76} = 0,6 \text{ Atm. Ueberdruck.}$$

§ 34.

Die Gesetze von Mariotte und Gay-Lussac.

Bei gleicher Temperatur ist das Volumen einer Gasmasse umgekehrt proportional dem Drucke, welchen dieselbe auf die einschließenden Gefäßwände ausübt. (Gesetz von Mariotte.)

Es sei V das Volumen und p der Druck einer bestimmten Gasmasse. Denkt man sich diese so zusammengepreßt, daß ihr Volumen nur noch V_1 beträgt, und wird der diesem kleineren Volumen entsprechende Druck mit p_1 bezeichnet, so ist nach dem obigen Gesetze:

$$\frac{p_1}{p} = \frac{V}{V_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 206)$$

Bei gleichem Druck ist die Vergrößerung der Volumeinheit einer Gasmasse proportional der Temperaturzunahme. (Gesetz von Gay-Lussac.)

Es sei V_0 das der Temperatur Null entsprechende Volumen einer Gasmasse, in welcher der Druck p stattfindet. Wird dann bei unverändertem Drucke die Temperatur auf t erhöht, so vergrößert sich das Volumen von V_0 auf V und es ist:

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \alpha t$$

oder:

$$\mathbf{V = V_0(1 + \alpha t)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 207)$$

worin für α erfahrungsgemäß der Wert einzusetzen ist:

$$\alpha = \mathbf{0{,}00367} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{273}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 208)$$

Bringt man ein anderes Mal dieselbe Gasmasse bei dem gleichen Druck p auf die Temperatur t_1, so wird deren Volumen:

$$V_1 = V_0 (1 + \alpha t_1)$$

Durch Division der Ausdrücke für V und V_1 erhält man:

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{V_1}} = \frac{\mathbf{1 + \alpha t}}{\mathbf{1 + \alpha t_1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 209)$$

Die Kombination der Gesetze von Mariotte und Gay-Lussac gibt die Beziehung zwischen den Volumen, Pressungen und Temperaturen zweier gleicher Gasmassen, bei denen die Pressungen sowohl wie die Temperaturen verschieden sind. Vergleicht man diese nämlich mit einer dritten Gasmasse, welche mit der ersteren gleiche Pressung, mit der zweiten gleiche Temperatur zeigt, so erhält man folgendes Schema:

	Volumen	Temperatur	Pressung
Gasmasse 1.	V	t	p
„ 2.	V_1	t_1	p_1
„ 3.	V_2	t_1	p

Aus der Vergleichung der Gasmassen 1 und 3 folgt nach dem Gay-Lussacschen Gesetze (Gl. 209):

$$\frac{V}{V_2} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_1}$$

Vergleicht man die Gasmassen 2 und 3, so ergibt sich nach dem Mariotte'schen Gesetze (Gl. 206):

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p}$$

und durch Multiplikation beider Ausdrücke erhält man:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{p_1}{p} \, \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_1}$$

oder wenn man Zähler und Nenner durch α dividiert und den in Gl. 208) angegebenen Zahlenwert $\alpha = \frac{1}{273}$ einsetzt:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{p_1}{p} \frac{273 + t}{273 + t_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 210)$$

Da die Gasmassen als gleich vorausgesetzt wurden, so sind auch deren Gewichte gleich, also:

$$V\gamma = V_1\gamma_1 \quad \text{oder} \quad \frac{V}{V_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma}$$

worin γ und γ_1 die Gewichte pro Kubikeinheit bedeuten. Der Gl. 210) läßt sich daher auch die Form geben:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{p_1}{p} \frac{273 + t}{273 + t_1}$$

oder:

$$\frac{p}{\gamma(273 + t)} = \frac{p}{\gamma_1(273 + t_1)} \quad \ldots\ldots \quad 211)$$

und kann in dieser Form zur Vergleichung verschieden großer Gasmassen benutzt werden, weil darin die von den Massen abhängigen Rauminhalte nicht mehr vorkommen.

Für die zusammengehörigen Werte $p_0\gamma_0t_0$ erhält man analog der Gl. 211):

$$\frac{p}{\gamma(273 + t)} = \frac{p_0}{\gamma_0(273 + t_0)}$$

Der Druck der atmosphärischen Luft an der Meeresoberfläche hat bei mittlerem Barometerstande und bei der Temperatur: $t_0 =$ Null pro qm die Größe (vergl. Gl. 205, S. 148):

$$p_0 = 10\,333 \text{ kg} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 212)$$

und das Gewicht eines cbm derselben ist:

$$\gamma_0 = 1{,}293 \text{ kg} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 213)$$

Durch Einsetzung dieser Werte in die letzte Gleichung ergibt sich für atmosphärische Luft:

$$\frac{p}{\gamma(273 + t)} = 29{,}27 \quad \ldots\ldots \quad 214)$$

Aufgabe 109. Bei einer Dampfmaschine erhalte der Kolben während $\frac{1}{4}$ des Hubes frischen Dampf von der Pressung p und werde dann durch die Expansivkraft des Dampfes bis zur Vollendung des Hubes weiter geschoben. Wie groß ist die Dampfspannung p_1 am Ende des Hubes unter der Annahme unveränderter Temperatur?

Auflösung. Wird die ganze Länge des Hubes mit h, der Durchmesser des Cylinders mit D bezeichnet, so sind die den Drücken p und p_1 entsprechenden Volumina:

$$V = \frac{D^2\pi}{4} \frac{1}{4} h$$

$$V_1 = \frac{D^2\pi}{4} h$$

folglich:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{1}{4}$$

und deshalb nach Gl. 206):

$$p_1 = p\,\frac{V}{V_1} = \frac{1}{4}\,p$$

Aufgabe 110. Bei einer Hochofenanlage habe das Kaltwindrohr (das Rohr, welches den Wind von den Gebläsen nach den Winderhitzern führt) den Durchmesser D_1, das Heißwindrohr (das Rohr, in welchem der Wind von den Winderhitzern ab zum Hochofen geführt wird) den Durchmesser D. In welchem Verhältnis müssen die Durchmesser D und D_1 zu einander stehen, wenn die Temperatur des kalten Windes = 15°, die des erhitzten = 700° ist, und wenn die Windgeschwindigkeit in beiden Rohrleitungen die gleiche sein soll?

Auflösung. Bei der konstanten Windgeschwindigkeit v ist das Volumen der pro sec durchströmenden Windmenge

in dem Kaltwindrohre: $V_1 = \frac{D_1^2 \pi}{4}\,v$

" " Heißwindrohre: $V = \frac{D^2 \pi}{4}\,v$

folglich:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{D^2}{D_1^2}$$

oder nach Gl. 209):

$$\frac{D}{D_1} = \sqrt{\frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_1}} = \sqrt{\frac{273 + 700}{273 + 15}} = 1{,}84$$

Der Durchmesser des Heißwindrohres muß danach 1,84mal so groß ausgeführt werden als der Durchmesser des Kaltwindrohres.

Aufgabe 111. Was wiegt ein Kubikmeter atmosphärische Luft bei einer Temperatur von 80° und gewöhnlicher Atmosphären-Pressung?

Auflösung. Durch Einsetzung von $t = 80$ und $p = 10\,333$ in Gl. 214) folgt:

$$\gamma = \frac{10\,333}{(273 + 80)\,29{,}27} = 1 \text{ kg}$$

§ 35.

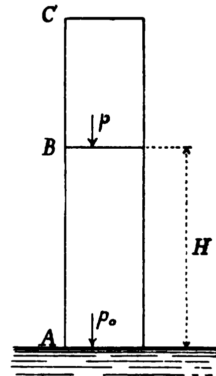
Barometrische Höhenmessung.

Der Luftdruck in der Atmosphäre nimmt mit der Höhe ab, weil auf die unteren Schichten höhere Luftsäulen drücken, als auf die oberen. Betrachtet man einen vom Meeresspiegel bis zu der Grenze der Atmosphäre reichenden Luftcylinder vom Querschnitt 1 (Fig. 162), so ist der Druck p_0 am Meeresspiegel gleich dem Gewichte der ganzen Säule AC, der Druck p in der Höhe H gleich dem Gewichte der Säule BC.

Da nun der Druck auf das Quecksilber des Barometers von dem Gewichte der darüber befindlichen Luftsäule herrührt, so verhalten sich die Baro-

meterstände wie die Luftdrücke. Der Barometerstand ist daher abhängig von der Höhe des Ortes über dem Meeresspiegel und um so kleiner, je höher der Ort liegt. Man erhält dadurch ein Mittel, den Höhenunterschied zweier Orte durch das Barometer zu bestimmen.

Fig. 162.



Am Meeresspiegel und bei 0° Temperatur wiegt 1 cbm Quecksilber 13 590 kg, 1 cbm Luft 1,293 kg, folglich ist die Luft $\frac{13\,590}{1,293} = \infty\, 10\,500$ mal so leicht als Quecksilber und es wird eine Quecksilbersäule von 1 mm Höhe im Gleichgewichte gehalten durch eine Luftsäule von 10 500 mm = 10,5 m Höhe. Das Barometer, welches am Meeresspiegel 760 mm zeigt, wird also, wenn man es um 10,5 m erhebt, auf 759 mm fallen.

Da aber die Dichtigkeit der Luft mit der Höhe abnimmt, so wird das Barometer nicht in demselben Verhältnis fallen, in welchem es höher gebracht wird. Außerdem übt die Temperatur Einfluß aus. Bei genauen Bestimmungen sind wegen des Feuchtigkeitsgehaltes der Luft, wegen der Abnahme der Schwere mit der Höhe und wegen der verschiedenen Größe der Schwere in verschiedenen Breitengraden noch besondere Korrektionen anzubringen. Für mittlere deutsche Verhältnisse kann die Annäherungsformel benutzt werden:

$$\mathbf{H = 18\,400\,(\log B - \log b)} \quad \ldots\ldots \quad 215)$$

worin H den Höhenunterschied zweier Orte in m; B und b die Barometerstände am unteren bezw. oberen Orte bedeuten.

Aufgabe 112. An zwei Orten sind die Barometerstände B = 740 mm und b = 640 mm gleichzeitig beobachtet. Wie groß ist der Höhenunterschied derselben?

Auflösung.

$$\log B = 2{,}869232$$
$$\log b = 2{,}806180$$
$$\log B - \log b = 0{,}063052$$

folglich nach Gl. 215):

$$H = 18\,400 \,.\, 0{,}063052 = 1160 \text{ m}$$

§ 36.

Auftrieb der Luft. Steigkraft und Steighöhe des Luftballons.

Jeder in der Luft befindliche Körper verdrängt eine Luftmasse von einem dem seinigen gleichen Volumen und erleidet infolge dessen einen Auftrieb, dessen Größe gleich dem Gewichte der verdrängten Luft ist. Der Druck, welchen der Körper auf seine Unterlage ausübt, ist also nicht das wirkliche Gewicht des-

selben, sondern der **Ueberschuß** des wirklichen Gewichtes über den Auftrieb der atmosphärischen Luft.

Ist G das wirkliche, P das scheinbare Gewicht des Körpers; ferner V sein Volumen und V_1 das Volumen des Gewichtstückes, so ist bei einer gleicharmigen Wage (Fig. 163), wenn γ das Gewicht von 1 cbm Luft bedeutet:

$$G - \gamma V = P - \gamma V_1$$

oder:

$$\mathbf{G = P + \gamma (V - V_1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 216)$$

Das wirkliche Gewicht eines Körpers ist nur dann gleich seinem scheinbaren Gewichte, wenn Körper und Gewichtstück gleiches Volumen haben. Ein

Fig. 163.

Körper, dessen Gewicht geringer ist als der Auftrieb der atmosphärischen Luft, wird durch eine Kraft P aufwärts getrieben, welche gleich ist dem Ueberschuß des Auftriebs A über das Gewicht G des Körpers.

$$\mathbf{P = A - G} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 217)$$

Hiernach kann z. B. die Steigkraft eines Luftballons berechnet werden. Ist V das Volumen des Ballons, γ das Gewicht von 1 cbm Luft am Boden, γ' das Gewicht von 1 cbm Gas, mit dem der Ballon gefüllt ist, so erhält man aus Gl. 217) für die Steigkraft des Ballons am Boden den Wert:

$$\mathbf{P = V (\gamma - \gamma') - G} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 218)$$

Der Ballon wird so lange in die Höhe steigen, bis er in eine Luftschicht kommt von so geringem Gewichte (γ_1 pro cbm), daß die verdrängte Luftmasse sein eigenes Gewicht nicht mehr übertrifft, also P = Null ist. Aus Gl. 218) folgt dann:

$$0 = V (\gamma_1 - \gamma') - G$$

oder:

$$\gamma_1 = \gamma' + \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{V}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 219)$$

Da sich die Gewichte γ und γ_1 pro cbm verhalten, wie die Luftdrücke, diese aber nach § 35 wie die Barometerstände, so ergibt sich die Steighöhe des Ballons nach Gl. 215) zu:

$$\mathbf{H = 18400 (\log \gamma - \log \gamma_1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 220)$$

Aufgabe 113. Ein Stück Kork, dessen Volumen $V = 0{,}42$ cbm betrug, wurde auf einer gleicharmigen Wage von einem gußeisernen Gewichtstück $P = 100$ kg im Gleichgewichte gehalten. Wie groß ist das wirkliche Gewicht des Korkstückes?

Auflösung. Nimmt man das spezifische Gewicht des Gußeisens zu 7,2 an, so ist (da 1 cbm Gußeisen 7200 kg wiegt) das Volum des Gewichtstückes:

$$V_1 = \frac{100}{7200} = 0{,}014 \text{ cbm}$$

folglich:

$$V - V_1 = 0{,}42 - 0{,}014 = 0{,}406 \text{ cbm}$$

Rechnet man dann 1 cbm Luft zu rund 1,3 kg, so ergibt sich nach Gl. 216)

$$G = 100 + 1{,}3 \,.\, 0{,}406 = 100{,}53 \text{ kg}$$

Aufgabe 114. Ein mit Wasserstoffgas gefüllter Luftballon habe ein Volumen $V = 1800$ cbm; das Gewicht desselben samt Zubehör und Belastung sei $G = 1200$ kg. Es soll die Steigkraft P des Ballons am Boden und die Steighöhe H berechnet werden ($\gamma = 1{,}3$ für Luft; γ' 0,09 für Wasserstoffgas).

Auflösung. Nach Gl. 218) ist die Steigkraft:

$$P = 1800\,(1{,}3 - 0{,}09) - 1200 = 978 \text{ kg}$$

1 cbm Luft am oberen Ende der Steighöhe wiegt nach Gl. 219):

$$\gamma_1 = 0{,}09 + \frac{1200}{1800} = 0{,}76 \text{ kg}$$

folglich ergibt sich die Steighöhe H aus Gl. 220) zu:

$$H = 18\,400\,(\log 1{,}3 - \log 0{,}76) = 4290 \text{ m}$$

§ 37.

Anwendungen des Luftdruckes.

1. Der Heber (Fig. 164).

Wird ein vorher luftleer gemachtes gekrümmtes Rohr a b c (ein sogen. Heber) mit dem einen kürzeren Schenkel in ein mit Wasser gefülltes Gefäß A getaucht, während das Ende c des anderen längeren Schenkels geschlossen gehalten wird, so steigt vermöge des Atmosphärendruckes das Wasser in dem kürzeren Schenkel bis zu der Höhe $h_0 = 10{,}33$ m über dem Wasserspiegel des Gefäßes empor, oder fließt, wenn die höchste Stelle b des Hebers um weniger als 10,33 m vom Wasserspiegel absteht, in den längeren Schenkel über. Wird dann das Rohr bei c geöffnet, so wird das Wasser dort ausfließen, und zwar mit um so größerer Geschwindigkeit, je tiefer der Punkt c unter dem Wasserspiegel liegt. Das Gefäß kann auf diese Weise gänzlich entleert werden, wenn das Rohrende a bis auf den Gefäßboden gesenkt wird.

2. Der Heronsball (Fig. 165).

Dieser besteht aus einem luftdicht verschlossenen Gefäße, in welchem sich ein Rohr befindet, das unten bis nahe an den Boden des Gefäßes reicht und

oben mit einem verjüngten Mundstück versehen ist. Wird das Gefäß bis zu einer beliebigen Höhe mit Wasser gefüllt, und die über dem Wasser befindliche

Fig. 164.

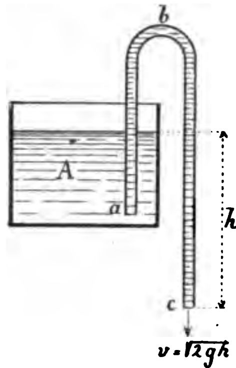
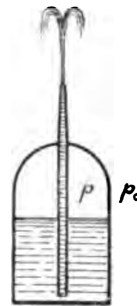
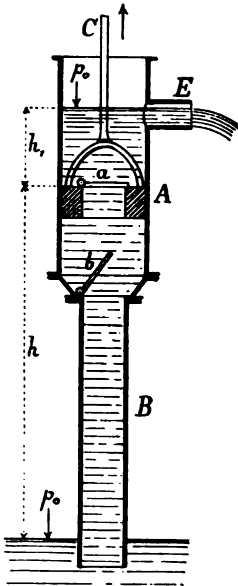


Fig. 165.



Luft auf irgend eine Art (z. B. durch Einblasen mit dem Munde) verdichtet, so wird vermöge des Ueberdrucks der inneren verdichteten Luft über die äußere das Wasser in dem Rohre emporgetrieben und spritzt durch das Mundstück in einem Strahle aus.

Fig. 166.



Der Heronsball findet unter dem Namen Windkessel vielfache Anwendung.

3. Die Saugpumpe (Fig. 166).

Sie besteht aus einem Cylinder (Stiefel) A, in dem sich ein durchbohrter und mit einem Ventil a versehener luftdicht schließender Kolben mittels der Kolbenstange C auf und nieder bewegen läßt, und aus dem Saugrohre B, welches vom Boden des Stiefels bis unter den Spiegel des zu hebenden Wassers reicht. Zwischen Stiefel und Saugrohr befindet sich ein zweites, sogen. Bodenventil. Beide Ventile öffnen sich nur nach oben. Wird der Kolben von der tiefsten Stellung aus gehoben, so entsteht unter demselben eine Luftleere, infolgedessen öffnet sich das Ventil b, während das Ventil a, auf welches von oben der Luftdruck wirkt, geschlossen ist. Die Luft verdünnt sich dabei in dem Stiefel und in dem Saugrohre, und das Wasser wird infolgedessen in letzterem etwas emporsteigen. Beim Niedergange des Kolbens schließt sich das Ventil b, während sich a öffnet, die Luft bleibt daher im Saugrohre verdünnt und wird beim nächsten Aufgange des Kolbens, wobei wieder b offen, a geschlossen ist, noch weiter verdünnt, so daß das Wasser höher aufsteigt.

Je mehr nun beim abwechselnden Auf- und Niedergange des Kolbens die Luft in dem Saugrohre verdünnt wird, um so höher wird das Wasser in demselben durch den äußeren Luftdruck emporgetrieben, gelangt schließlich in den Stiefel und sodann beim Niedergange des Kolbens über das Ventil a, so daß es bei dem nächsten Aufsteigen des Kolbens bis zum Ausgußrohr E gehoben wird und dort abfließt.

Da der atmosphärische Druck einer Wassersäule von $h_0 = 10{,}33$ m das Gleichgewicht hält, so kann die Pumpe nur dann wirksam sein, wenn die Höhe des Bodenventils über dem Unterwasserspiegel kleiner als 10,33 m ist. Praktisch geht man selten über 7 bis 8 m hinaus.

Bezeichnet man die Querschnittsfläche des Pumpenstiefels mit F, die augenblickliche Höhe des Ventils a über dem Wasserspiegel mit h, unter dem Ausgußrohr mit h_1, so ist der von oben nach unten auf den Kolben wirkende Druck:

$$P_1 = p_0 F + \gamma h_1 F$$

Der durch eine Wassersäule von der Höhe $h_0 - h$ von unten nach oben gegen den Kolben ausgeübte Druck ist:

$$P_2 = \gamma (h_0 - h) F$$

folglich beträgt die zum Heben des Kolbens erforderliche Kraft:

$$P = P_1 - P_2 = p_0 F + \gamma h_1 F - \gamma (h_0 - h) F$$

$$P = p_0 F + \gamma h_1 F - \gamma h_0 F + \gamma h F$$

oder wegen: $\gamma h_0 = p_0$

$$\mathbf{P = \gamma F (h + h_1)} \quad . \quad . \quad 221)$$

4. Die Druckpumpe (Fig. 167).

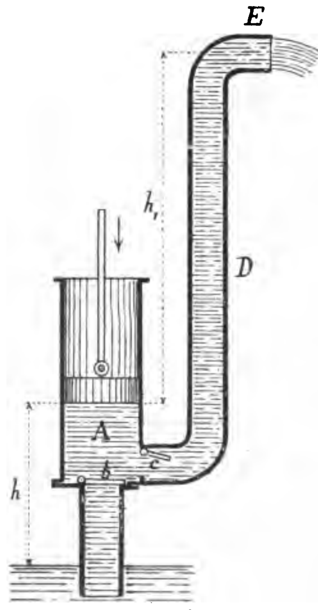
Diese unterscheidet sich von der Saugpumpe dadurch, daß der Kolben kein Ventil hat, sondern massiv ausgeführt wird. Statt dessen ist das unten am Pumpencylinder A angebrachte Steigrohr (Druckrohr) D mit einem Ventil c versehen. Man nennt b das Saugventil, c das Druckventil.

Nachdem das Wasser durch das Saugventil b bis in den Stiefel getreten ist, wird es beim Niedergange des Kolbens, wobei b geschlossen, c geöffnet ist, in dem Druckrohre D bis zu dem Ausgußrohre E emporgetrieben.

Die zum Heben des Kolbens erforderliche Kraft ergibt sich in ähnlicher Weise wie unter 3), wenn wieder mit F die Querschnittsfläche des Kolbens bezeichnet wird, nach Fig. 167 zu:

$$\mathbf{P = \gamma F h} \quad . \quad . \quad . \quad 222)$$

Fig. 167.



Beim Niedergange des Kolbens ist eine Wassersäule von der Höhe h_1 zu heben; die dazu nötige Kraft ist:

$$P_1 = \gamma F h_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots 223)$$

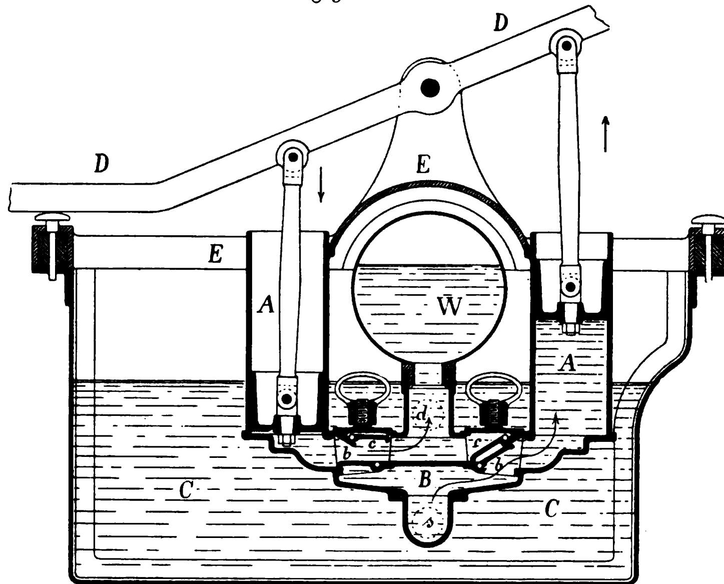
Die Druckpumpen werden gewöhnlich dicht über dem Unterwasser aufgestellt. Die Länge des Saugrohres darf theoretisch 10,33 m nicht überschreiten. Die Länge des Druckrohres kann beliebig angenommen werden, es ist dabei nur zu berücksichtigen, daß die zum Heben der Wassersäule erforderliche Kraft in gleichem Verhältnis mit der Höhe derselben zunimmt.

Außer der beschriebenen einfach wirkenden Druckpumpe, bei welcher nur Wasser während des Niederganges des Kolbens gefördert wird, kommen auch doppelt wirkende vor; diese liefern Wasser sowohl beim Aufgang als auch beim Niedergang des Kolbens. Meistens werden jedoch in der Praxis zwei gekuppelte einfach wirkende Pumpen einer doppelt wirkenden vorgezogen.

5. Die Feuerspritze (Fig. 168).

Sie besteht aus zwei einfach wirkenden Druckpumpen A, welche durch das Ventilgehäuse B miteinander verbunden sind, und deren Kolben eine ab-

Fig. 168.



wechselnde Bewegung ausführen. Während der eine Kolben aufsteigt, geht gleichzeitig der andere nieder. Beim Aufsteigen des einen Kolbens (Fig. 168 rechts) gelangt das Wasser aus dem Saugrohr s durch das geöffnete Ventil b in den Stiefel A, während das Ventil c geschlossen ist. Beim Niedergange des Kolbens (Fig. 168 links) schließt sich b, und das Wasser wird durch das geöffnete Ventil c in das Druckrohr d, bezw. in den Windkessel W gepreßt.

Der ganze Apparat befindet sich innerhalb des Wasserkastens C und ist mittels vier durchgehender Schrauben an dem über dem Wasserkasten angebrachten Support E frei aufgehängt. In dem Support ist ebenfalls der Druckbaum D gelagert.

Bei fortgesetztem Pumpen wird das Wasser in den außen am Druckrohr d befestigten Spritzenschlauch gepreßt und tritt in einem kräftigen Strahle aus dem Mundstück desselben aus. Gleichzeitig steigt das Wasser im Windkessel empor, wodurch die in demselben befindliche Luft stark komprimiert wird.

Der Hauptvorteil des Windkessels besteht darin, daß das Wasser nicht bei jedem Niedergange des einen oder anderen Kolbens ruckweise, sondern in einem kontinuierlichen Strahle ausgetrieben wird, da die komprimierte Luft einen konstanten Druck auf das Wasser im Windkessel ausübt. Gewöhnlich wird der Inhalt des Windkessels gleich dem vier- bis fünffachen Inhalt eines Pumpencylinders gemacht.

Die bei einer Feuerspritze gegebenen Größen sind die Strahlhöhe H, die pro sec zu liefernde Wassermenge Q, und die Hubhöhe s sowie die Geschwindigkeit C des Angriffspunktes der an den Druckbäumen arbeitenden Mannschaft.

Könnte der aus dem Mundstück mit der Geschwindigkeit v ausspritzende Wasserstrahl im luftleeren Raume emporsteigen, so wäre die theoretische Strahlhöhe:

$$H' = \frac{v^2}{2g}$$

Wegen des Luftwiderstandes ist die wirklich erreichte Strahlhöhe H für mittlere Verhältnisse nur etwa $^4/_5$ so groß, also $H' = {}^5/_4\, H$ zu setzen. Danach erhält man aus der letzten Gleichung für v den Wert:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{2g \,.\, {}^5/_4 H}} = \mathbf{4{,}95}\ \sqrt{\mathbf{H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 224)$$

Der Durchmesser d des Mundstückes folgt dann aus der Gleichung

$$\frac{\mathbf{d^2\pi}}{4}\,\mathbf{v} = \frac{\mathbf{d^2\pi}}{4}\,4{,}95\ \sqrt{\mathbf{H}} = \mathbf{Q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 225)$$

Bei m-facher Uebersetzung des Druckhebels ist die Geschwindigkeit des Pumpenkolbens:

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{m}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 226)$$

und der Kolbenhub:

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{m}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 227)$$

Der Durchmesser D des Kolbens ergibt sich dann aus der Bedingung:

$$\frac{D^2\pi}{4}\,c = \frac{d^2\pi}{4}\,v$$

zu:

$$\mathbf{D} = \mathbf{d}\sqrt{\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 228)$$

Wird die am Druckbaume ausgeübte Kraft mit P bezeichnet, so leistet die Mannschaft pro sec die Arbeit:

$$\mathfrak{A} = P C$$

Die Arbeit, welche erforderlich ist, die Wassermenge Q auf die (theoretische) Höhe $H' = {}^5/_4 H$ zu heben, ist:

$$\mathfrak{A}_1 = 1000\, Q\, {}^5/_4 H$$

folglich ist bei dem Güteverhältniß η:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\eta} . \mathfrak{A}_1$$

oder:

$$\mathbf{P C} = \frac{1}{\eta}\, \mathbf{1000\, Q\, {}^5/_4\, H} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 229)$$

woraus sich dann P berechnen läßt.

Bei Anwendung von Schläuchen ist auf den Röhrenwiderstand Rücksicht zu nehmen, der berechnet werden kann nach Gl. 194) S. 142, worin aber der Koeffizient 0,024 zu ersetzen ist durch 0,04. Ist l die Länge, d_1 der Durchmesser des Schlauches und v_1 die Geschwindigkeit des Wassers in demselben, so wird:

$$\mathbf{h_1 = 0{,}04\, \frac{l}{d_1}\, \frac{v_1^2}{2g}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 230)$$

und man erhält statt Gl. 229):

$$\mathbf{P C} = \frac{1}{\eta}\, \mathbf{1000\, Q\, {}^5/_4 (H + h_1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 231)$$

Der Druck im Windkessel, in Atmosphären ausgedrückt, ist:

$$\mathbf{p = \frac{{}^5/_4 H + h_1}{h_0} = \frac{{}^5/_4 H + h_1}{10{,}33}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 232)$$

6. Die Luftpumpe (Fig. 169).

Sie dient vorzugsweise zum Verdünnen der Luft, kann aber auch zum Verdichten derselben benutzt werden. Die Hauptbestandteile der Luftpumpe sind: 1) Der Stiefel A, in welchem sich ein dicht schließender Kolben auf und nieder bewegen läßt. 2) Die durch das Rohr C mit dem Stiefel verbundene, sorgfältig abgeschliffene Platte B (Teller). 3) Der meist aus einer Glasglocke bestehende Rezipient D, in welchem, nachdem er luftdicht auf den Teller gesetzt ist, die Luft verdünnt werden soll. 4) Der Hahn E, welcher dazu dient, die Verbindung zwischen dem Stiefel und dem Rezipienten entweder herzustellen oder abzuschließen.

Der Hahn befindet sich unmittelbar unter dem Stiefel und ist mit zwei Bohrungen versehen. Wird der Kolben in die Höhe gezogen, so hat der Hahn die in Fig. 169 angegebene Stellung. Die in dem Rezipienten D und dem Rohre C enthaltene Luft dehnt sich dabei um den Raum des Stiefels aus und wird folglich verdünnt. Beim Niedergange des Kolbens wird der Hahn

durch Drehung um 90° in die Stellung Fig. 169a gebracht, wodurch die Luft in C und D abgesperrt, der Stiefel aber mit der äußeren Luft verbunden wird, so daß die im Stiefel befindliche Luft nach außen entweichen kann. Durch fortgesetztes Auf- und Niederbewegen des Kolbens bei entsprechender Hahnstellung wird die Luft immer mehr und mehr verdünnt.

Fig. 169.

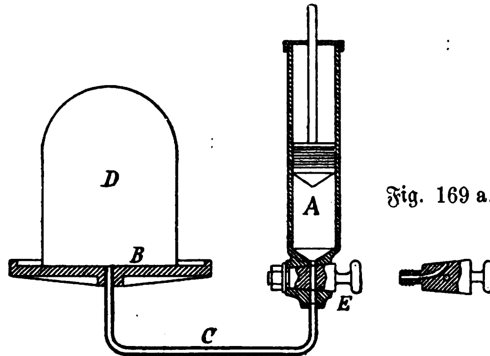


Fig. 169 a.

Wird der Rauminhalt des Stiefels mit V, der des Rezipienten nebst dem Rohre mit V_1 bezeichnet, so ist die Verdünnung der Luft:

$$\text{nach dem ersten Hube} = \left(1 + \frac{V}{V_1}\right)^1$$

$$\text{„ „ zweiten „} = \left(1 + \frac{V}{V_1}\right)^2$$

. . . .

$$\text{allgemein „ „ n ten „} = \left(1 + \frac{V}{V_1}\right)^n$$

Setzt man z. B. $V_1 = 2V$, so würde nach dem dritten Hube die Verdünnung der Luft:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 . = \frac{27}{8}$$

sein, d. h. das Gewicht von 1 cbm der verdünnten Luft würde nur $^8/_{27}$ von dem der gewöhnlichen atmosphärischen Luft betragen.

Soll die Luftpumpe zum Verdichten der Luft benutzt werden, so erhält der Hahn gerade die umgekehrte Stellung als beim Verdünnen der Luft. Die in Fig. 169 angegebene Hahnstellung würde also dem Niedergange des Kolbens entsprechen. An das Ende des Rohres C ist dann statt des Tellers B der entsprechend gestaltete Rezipient D luftdicht anzuschrauben.

Aufgabe 115. Es sollen die Dimensionen und die Betriebskraft einer Feuerspritze berechnet werden, welche pro sec 0,007 cbm Wasser auf eine Höhe von H = 20 m zu bringen im stande ist. Dabei sind noch folgende Werte gegeben:

Hubhöhe der Mannschaft	$s = 1{,}25$ m
Geschwindigkeit des Druckbaumes .	$C = 1{,}4$ m
Geschwindigkeit der Pumpenkolben .	$c = 0{,}28$ m
Güteverhältnis der Pumpen . . .	$\eta = 0{,}75$
Durchmesser des Schlauches . . .	$d_1 = 0{,}05$ m
Länge des Schlauches	$l = 20$ m

Auflösung. Nach Gl. 224) wird:

$$v = 4{,}95 \sqrt{20} = 22{,}14 \text{ m}$$

folglich nach Gl. 225):

$$\frac{d^2\pi}{4} = \frac{0{,}007}{22{,}14} = 0{,}000316 \text{ qm} = 3{,}16 \text{ qcm}$$

danach wird der Durchmesser des Mundstückes:

$$d = \backsim 2 \text{ cm}$$

Die Uebersetzung des Druckhebels wird nach Gl. 226)

$$m = \frac{C}{c} = \frac{1{,}4}{0{,}28} = 5$$

Aus den Gl. 227) und 228) ergeben sich dann:

$$\text{Kolbenhub: } h = \frac{1{,}25}{5} = 0{,}25 \text{ m}$$

$$\text{Kolbendurchmesser: } D = 2\sqrt{\frac{22{,}14}{0{,}28}} = \backsim 18 \text{ cm}$$

Ohne Schlauch würde nach Gl. 229) sein:

$$P = \frac{1}{0{,}75} \cdot 1000 \cdot 0{,}007 \cdot {}^5/_4 \cdot 20 \cdot \frac{1}{1{,}4} = 167 \text{ kg}$$

Die Geschwindigkeit v_1 des Wassers im Schlauche ergibt sich aus:

$$\frac{d_1^2\pi}{4} v_1 = \frac{d^2\pi}{4} v$$

zu:

$$v_1 = v \frac{d^2}{d_1^2} = 22{,}14 \cdot \frac{4}{25} = 3{,}54 \text{ m}$$

folglich wird nach Gl. 230):

$$h_1 = 0{,}04 \cdot \frac{20}{0{,}05} \cdot \frac{3{,}54^2}{2 \cdot 9{,}81} = 10{,}2 \text{ m}$$

und nach Gl. 231) die am Druckhebel auszuübende Kraft:

$$P = \frac{1}{0{,}75} \cdot 1000 \cdot 0{,}007 \, ({}^5/_4 \cdot 20 + 10{,}2) \, \frac{1}{1{,}4} = 236 \text{ kg}$$

Da man einen Mann gut mit 15 kg in Anschlag bringen kann, so erfordert die Pumpe zum Betriebe etwa 16 Mann. Der Druck im Windkessel ist nach Gl. 232):

$$p = \frac{{}^5/_4 \cdot 20 + 10{,}2}{10{,}33} = 3{,}4 \text{ Atmosphären.}$$

Abschnitt VII.

Die Lehre von der Bewegung gasförmiger Körper (Aerodynamik).

§ 38.

Ausfluß der Luft.

Die in § 29 für die Ausflußgeschwindigkeit des Wassers gefundene Gl. 183) S. 137

$$v = \sqrt{2gh}$$

kann auch zur Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeit der Luft benutzt werden, wenn man darin die Wassersäule von der Höhe h ersetzt durch eine Luftsäule von demselben Gewichte.

Da sich nun die Gewichte von Wasser und atmosphärischer Luft verhalten, wie 1000 : 1,293, so wird die Luftsäule, welche einer Wassersäule von der Höhe h das Gleichgewicht hält, die Höhe $\frac{1000}{1,293}$ h haben. Danach ergibt sich für die Geschwindigkeit, mit welcher Luft von höherer Pressung aus der Oeffnung eines Gefäßes in die freie Atmosphäre ausströmt, die Gleichung:

$$\mathbf{v} = \sqrt{2\,\mathbf{g}\,\frac{1000}{1,293}\,\mathbf{h}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 233)$$

worin h die Höhe einer Wassersäule bedeutet, durch welche die Druckdifferenz gemessen wird.

Bei Ableitung der Gl. 233) wurde die Druckdifferenz als konstant angenommen; ebenso ist die Temperaturänderung, welche die Luft bei dem Durchgang durch die Oeffnung erleidet, unberücksichtigt geblieben; beides ist nur für ganz geringe Druckdifferenzen zulässig und nur für diesen Fall gibt die Gl. 233) brauchbare Resultate.

Bezeichnet man den Querschnitt der Oeffnung mit f, so ist, wenn der Ausfluß der Luft ohne Kontraktion erfolgen würde, die Ausflußmenge:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{f\,v} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 234)$$

In Wahrheit findet aber stets Kontraktion statt, und um die wirkliche Ausflußmenge zu erhalten, hat man den in Gl. 234) angegebenen Wert noch mit einem Ausflußkoeffizienten μ zu multiplizieren.

Bei vollkommener Kontraktion, also bei Oeffnungen in dünner Wand, ist:

$$\mu = 0,62$$

Bei Anwendung eines kurzen konischen Ansatzrohres, dessen Kanten gegen das Gefäß gut abgerundet sind, kann man setzen:

$$\mu = 0,9$$

Aufgabe 116. In einem größeren Gefäße sei Luft von 1,2 Atmosphären Spannung eingeschlossen und fließe durch eine Oeffnung von 0,002 qm Querschnitt in die freie Atmosphäre. Es soll die Geschwindigkeit v und die pro sec ausfließende Luftmenge Q berechnet werden.

Auflösung. Die Druckdifferenz beträgt 1,2 — 1 = 0,2 Atmosphären; dieser entspricht eine Wassersäule von der Höhe:

$$h = 0{,}2 \,.\, 10{,}33 = 2{,}066 \text{ m}$$

Daher ist nach Gl. 233)

$$v = \sqrt{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, \frac{1000}{1{,}293} \,.\, 2{,}066} = 177 \text{ m}$$

Die theoretische Ausflußmenge ergibt sich nach Gl. 234) zu:

$$Q = 0{,}002 \,.\, 177 = 0{,}354 \text{ cbm}$$

Bei gut abgerundeter Düse ($\mu = 0{,}9$) ist dann die wirklich ausfließende Luftmenge:

$$Q = 0{,}9 \,.\, 0{,}354 = \backsim 0{,}32 \text{ cbm}$$

§ 39.

Bewegung der Gase in Rohrleitungen.

Bewegt sich ein Gas mit einer gewissen Geschwindigkeit in einem Rohre, so entsteht, ebenso wie bei den tropfbarflüssigen Körpern, durch die an den Rohrwänden auftretende Reibung ein Widerstand. Um die zur Ueberwindung desselben erforderliche Druckhöhe zu bestimmen, kann die Gl. 194 S. 142 benutzt werden, wenn darin die Wassersäule von der Höhe h_1 ersetzt wird durch eine Gassäule von demselben Gewichte, also, wenn mit γ das Gewicht von 1 cbm Gas bezeichnet wird, von der Höhe $\frac{1000}{\gamma} h_1$

für atmosphärische Luft ist: $\gamma = 1{,}293$

„ Leuchtgas „ $\gamma = 0{,}52$

Der Druckhöhenverlust beträgt daher nach Einsetzung dieser Werte in Gl. 194):

für atmosphärische Luft: $$\mathbf{h_1 = 0{,}000031 \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}} \quad \ldots\ldots \quad 235)$$

für Leuchtgas: $$\mathbf{h_1 = 0{,}0000125 \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}} \quad \ldots\ldots \quad 236)$$

Aufgabe 117. In einer Rohrleitung von 1000 m Länge und 15 cm Durchmesser bewegt sich Leuchtgas mit 3 m Geschwindigkeit. Wenn der Ueberdruck am Anfang der Leitung 0,13 m Wassersäule beträgt, wie groß ist derselbe dann noch am Ende der Leitung?

Auflösung. Der Verlust an Druckhöhe ist nach Gl. 236):

$$h_1 = 0{,}0000125 \frac{1000}{0{,}15} \cdot \frac{3^2}{2 \,.\, 9{,}81} = 0{,}038 \text{ m}$$

Der Druck am Ende der Leitung beträgt daher:

$$0{,}13 - 0{,}038 = 0{,}092 \text{ m Wassersäule.}$$

§ 40.

Widerstand der Flüssigkeiten gegen bewegte feste Körper.

Wird ein fester Körper in einer ruhenden Flüssigkeit (wobei als Repräsentant der tropfbaren Flüssigkeiten Wasser, als der der gasförmigen Flüssigkeiten Luft angesehen werden kann) bewegt, so tritt der Bewegung ein Widerstand entgegen. Dieser entsteht dadurch, daß der Körper die Wasser- oder Luftteilchen aus dem Raume verdrängen muß, in welchen er selbst einzudringen strebt, wodurch die Geschwindigkeit seiner Bewegung verringert wird.

Der Widerstand ist bei mäßigen Geschwindigkeiten erfahrungsgemäß proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit des bewegten Körpers; er ist außerdem um so größer, je dichter die Flüssigkeit (das Mittel oder Medium) ist, d. h. je größer das Gewicht der Kubikeinheit desselben ist; ferner um so größer, je größer die der Einwirkung des Mittels ausgesetzte Fläche des Körpers ist. Diese Fläche ist gleich zu setzen der Projektion des Körpers auf eine senkrecht zur Bewegungsrichtung stehende Ebene. Dabei ist noch die Gestalt des Körpers von wesentlichem Einfluß, indem z. B. ein vorn zugespitzter oder zugeschärfter Körper (z. B. ein Schiff) sich leichter in der Flüssigkeit fortbewegt, als wenn er vorn flach oder gar hohl ist.

Danach ergibt sich für die Größe des Widerstandes der schon in § 31 (Gl. 204) abgeleitete Ausdruck:

$$W = k \gamma F \frac{v^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 237)$$

in welchem γ das Gewicht der Flüssigkeit pro Kubikeinheit, F den Flächeninhalt jener Projektion des Körpers, v die Geschwindigkeit und k einen von der Form des Körpers abhängigen Erfahrungskoeffizienten bezeichnet.

Für ein in der Achsenrichtung sich bewegendes Prisma oder einen Cylinder von mäßiger Länge ist $k = {}^4/_3$.

Für einen in der Querrichtung sich bewegenden Cylinder ist $k = {}^2/_3$
„ eine Kugel bei geringen Geschwindigkeiten „ $k = 0{,}5$
„ „ „ „ größeren „ „ $k = 0{,}6$

Redtenbacher gibt bei Eisenbahnzügen den Luftwiderstand an zu:

$$W = 0{,}0704 \left(F + \frac{1}{4} f n\right) v^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 238)$$

worin F die Vorderfläche der Lokomotive, f die Vorderfläche jedes der angehängten Wagen, n die Anzahl derselben und v die Fahrgeschwindigkeit bedeutet.

Aufgabe 118. Mit welcher Geschwindigkeit v fallen unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes Hagelkörner von r = 0,5 cm Radius nieder?

Auflösung. Wenn die Geschwindigkeit v eine solche Größe erreicht hat, daß der Luftwiderstand gleich dem Gewichte des Hagelkorns ist, so findet Gleichgewicht

der Kräfte statt, und das Hagelkorn wird sich nach dem Gesetze der Trägheit mit der erlangten Geschwindigkeit gleichmäßig fortbewegen.

Bezeichnet man mit γ_1 das Gewicht von 1 cbm Eis
" γ " " " 1 " Luft

so ist nach Gl. 237) zu setzen:

$$\gamma_1 \frac{4}{3} r^3 \pi = k \gamma r^2 \pi \frac{v^2}{2 \cdot 9{,}81}$$

oder für v aufgelöst:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{4}{3} \frac{r}{k} \frac{\gamma_1}{\gamma}}$$

Setzt man hierin:

$$\gamma_1 = 920; \qquad \gamma = 1{,}293; \qquad k = 0{,}5$$

so erhält man:

$$v = 13{,}75 \text{ m}$$

Aufgabe 119. Wie groß ist der Luftwiderstand bei einem 6 Waggons führenden Eisenbahnzuge, welcher sich mit einer Geschwindigkeit von 20 m pro sec bewegt?

Auflösung. Nimmt man F zu 7 qm; f zu 4 qm an, so ist nach Gl. 238)

$$W = 0{,}0704 \left(7 + \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 6\right) 20^2 = 366 \text{ kg}$$

Anhang.

Tabelle I.

Reibungskoeffizienten.

a) Koeffizienten für die gleitende Reibung.

Reibende Körper	Zustand der Oberflächen	Reibungskoeffizient f der Ruhe	Reibungskoeffizient f der Bewegung
Gußeisen			
auf Gußeisen oder Bronce . . .	wenig fettig	0,16	0,15
Schmiedeisen			
auf Schmiedeisen	trocken	—	0,44
auf Gußeisen oder Bronce . . .	trocken	0,19	0,18
Bronce			
auf Bronce	trocken	—	0,2
auf Gußeisen	trocken	—	0,22
auf Schmiedeisen	wenig fettig	—	0,16
Eiche			
auf Eiche { Fasern parallel der Bewegung	{ trocken	0,62	0,48
	{ mit Seife geschmiert	0,44	0,16
auf Eiche { Fasern senkrecht zur Bewegung	{ trocken	0,54	0,34
	{ mit Wasser	0,71	0,25
Leder			
auf Eiche	trocken	0,47	0,27
auf Gußeißen	trocken	0,28	—
als Kolbenliderung *)	geschmiert	0,12	—

*) Bei hydraulischen Pressen fand Marié den Reibungskoeffizienten
$f = 0{,}0017_{min}$ bis $0{,}005_{max}$

b) Koeffizienten für die Zapfenreibung.

Reibende Körper	Reibungskoeffizient f Schmierung auf gewöhnl. Art	ununterbrochen
Gußeisen		
auf Gußeisen	0,14	0,054
auf Bronce	0,08	0,05
auf Pockholz	0,1	0,09
Schmiedeisen*)		(0,28 mit Wasser
auf Gußeisen oder Bronce	0,08	0,03
auf Pockholz	0,11	—

*) Kirchweger fand bei gut gelagerten Eisenbahnachsen und bei vorzüglicher Schmierung f = 0,01.

Anmerkung. Der Reibungskoeffizient der Ruhe ist für Zapfenreibung nahezu 10mal so groß als der der Bewegung.

Tabelle II.

Spezifische Gewichte.

a) Feste Körper.

Bezogen auf Wasser bei 4° C. und unter 760 mm Quecksilberdruck.

Aluminium	2,5 — 2,7	Gold	18,6—19,3	
Anthracit	1,3 — 1,7	Granit	2,5— 3,0	
Antimon	6,6 — 6,7	Graphit	1,8— 2,2	
Asbest	2,1 — 2,8	Holzarten:	grün	lufttrocken
Asphalt, rein	1,1	Ahorn	0,9	0,7
„ mit Schotter gestampft	1,8 — 2,0	Birke	0,9	0,7
Basalt	2,8 — 3,2	Buche	0,98	0,72
Blei	11,3 —11,4	Buchsbaum	1,00	0,97
Bronce	8,3 — 8,6	Eiche	1,00	0,6—0,85
Cement	2,7 — 3,1	Esche	0,85	0,65
Eis	0,92	Fichte	0,9	0,43
Eisen, gegossen . . .	7,0 — 7,5	Kiefer	0,9	0,6
„ geschmiedet . .	7,6 — 7,8	Kork	—	0,24
Eisenerz	3,4 — 5,0	Pappel	0,86	0,4—0,5
Elfenbein	1,8 — 1,9	Pockholz	—	1,33
Erde	1,4 — 2,0	Tanne	0,89	0,6
Gips, gegossen . . .	0,97— 1,1	Holzkohle von Nadelholz	0,28—0,44	
Glas, Fenster- . . .	2,6 Mittel	„ „ Eichenholz	0,57	
„ Flint-	3,2 — 3,8	Kalk, gebrannt . . .	2,3 —3,1	
Glockenmetall	8,8	Kalkmörtel	1,6 —1,8	

Kalkstein	2,6 —2,8	Sand, trocken	1,4 — 1,6
Kautschuk	0,92—0,98	„ feucht	1,9 — 2,0
Kies	1,8 —2,0	Sandstein	1,9 — 2,7
Kieselstein	2,3 —2,7	Schiefer	2,6 — 2,7
Koks	0,3 —0,5	Schnee	0,125
Kupfer	8,6 —9	Schwefel	1,96— 2,05
Lehm, trocken	1,52	Schwerspat	4,466
„ frisch gegraben .	1,7 —2,5	Silber	10,1 —10,6
Marmor	2,5 —2,8	Stahl	7,8 — 8,0
Mauerwerk		Steinkohlen	1,2 — 1,5
Bruchstein	2,4 —2,46	Thon	1,8 — 2,63
Sandstein	2,05—2,12	Wachs	0,97
Ziegel	1,47—1,7	Ziegelstein	1,4 — 2,2
Messing	8,4 —8,7	Zink	6,8 — 7,2
Pech	1,1 Mittel	Zinn	7,2 — 7,4
Platin	21,45	Zinnober	8,1
Porzellan	2,4 —2,5	Zucker	1,6
Quarz	2,5 —2,8		

b) Flüssige Körper.

Bezogen auf Wasser bei 4° C. und unter 760 mm Quecksilberdruck.

Alkohol	0,79	Quecksilber	13,596
Bier	1,023—1,034	Salpetersäure	1,53
Glycerin	1,26	Salzsäure	1,192
Kochsalzlauge, gesättigt.	1,21	Schwefeläther	0,733
Milch	1,02 —1,04	Schwefelsäure, englische.	1,842
Oele: Leinöl	0,94	„ Nordhäuser	1,90
Olivenöl . . .	0,918	Seewasser	1,029
Rüböl	0,914	Teer	1,195
Steinöl . . .	0,80	Wasser, destilliert . . .	1,00
Terpentinöl . .	0,873		

c) Gasförmige Körper.

Bezogen auf atmosphärische Luft bei 0° und unter 760 mm Quecksilberdruck.

		1 cbm wiegt			1 cbm wiegt
Atmosphärische Luft	1,000	1,293 kg	Stickstoff	0,9714	1,256 kg
Kohlenoxyd . . .	0,9674	1,251 „	Wasserdampf bei 100°	0,4686	0,606 „
Kohlensäure . . .	1,5291	1,977 „	Wasserstoff	0,0693	0,0896 „
Sauerstoff	1,1056	1,432 „			

Tabelle IIIa.

Fallhöhen für die Endgeschwindigkeiten von 0 bis 30 m

$$v = \text{runde Zahl}; \quad h = \frac{v^2}{2g}$$

v =	h =	v =	h =	v =	h =	v =	h =
0,00	0,00000	1,45	0,10716	3,3	0,5550	11,0	6,1672
0,05	0,00013	1,50	0,11468	3,4	0,5892	11,5	6,7406
0,10	0,00051	1,55	0,12245	3,5	0,6244	12,0	7,3394
0,15	0,00115	1,60	0,13048	3,6	0,6606	12,5	7,9638
0,20	0,00204	1,65	0,13876	3,7	0,6978	13,0	8,6137
0,25	0,00319	1,70	0,14730	3,8	0,7360	13,5	9,2890
0,30	0,00459	1,75	0,15609	3,9	0,7752	14,0	9,9898
0,35	0,00624	1,80	0,16514	4,0	0,8155	14,5	10,7161
0,40	0,00816	1,85	0,17444	4,1	0,8568	15,0	11,4679
0,45	0,01032	1,90	0,18400	4,2	0,8991	15,5	12,2452
0,50	0,01274	1,95	0,19381	4,3	0,9424	16,0	13,0479
0,55	0,01542	2,00	0,20387	4,4	0,9868	16,5	13,8761
0,60	0,01835	2,05	0,21419	4,5	1,0321	17,0	14,7299
0,65	0,02153	2,10	0,22477	4,6	1,0785	17,5	15,6091
0,70	0,02498	2,15	0,23560	4,7	1,1259	18,0	16,5138
0,75	0,02867	2,20	0,24669	4,8	1,1743	18,5	17,4439
0,80	0,03262	2,25	0,25803	4,9	1,2238	19,0	18,3996
0,85	0,03683	2,30	0,26962	5,0	1,2742	19,5	19,3807
0,90	0,04128	2,35	0,28147	5,5	1,5418	20	20,3874
0,95	0,04600	2,40	0,29358	6,0	1,8349	21	22,4771
1,00	0,05097	2,45	0,30594	6,5	2,1534	22	24,6687
1,05	0,05619	2,50	0,31855	7,0	2,4975	23	26,9623
1,10	0,06167	2,6	0,34455	7,5	2,8670	24	29,3578
1,15	0,06741	2,7	0,37156	8,0	3,2620	25	31,8552
1,20	0,07339	2,8	0,39959	8,5	3,6825	26	34,4546
1,25	0,07964	2,9	0,42864	9,0	4,1284	27	37,1560
1,30	0,08614	3,0	0,45872	9,5	4,5999	28	39,9592
1,35	0,09289	3,1	0,48981	10,0	5,0968	29	42,8644
1,40	0,09990	3,2	0,52192	10,5	5,6193	30	45,8716

Tabelle III b.

Endgeschwindigkeiten für die Fallhöhen von 0 bis 38 m

h = runde Zahl; $v = \sqrt{2gh}$

h =	v =	h =	v =	h =	v =	h =	v =
0,00	0,00000	2,0	6,2635	5,0	9,9037	12,5	15,659
0,05	0,99037	2,1	6,4181	5,2	10,100	13,0	15,969
0,10	1,4006	2,2	6,5691	5,4	10,292	13,5	16,273
0,15	1,7154	2,3	6,7170	5,6	10,481	14,0	16,572
0,20	1,9807	2,4	6,8142	5,8	10,666	14,5	16,865
0,25	2,2145	2,5	7,0027	6,0	10,849	15,0	17,154
0,30	2,4259	2,6	7,1418	6,2	10,939	15,5	17,437
0,35	2,6202	2,7	7,2777	6,4	11,205	16,0	17,716
0,40	2,8012	2,8	7,4111	6,6	11,378	16,5	17,991
0,45	2,9711	2,9	7,5422	6,8	11,550	17,0	18,261
0,50	3,1318	3,0	7,6715	7,0	11,718	17,5	18,528
0,55	3,2846	3,1	7,7981	7,2	11,884	18,0	18,790
0,60	3,4307	3,2	7,9230	7,4	12,048	18,5	19,050
0,65	3,5708	3,3	8,0457	7,6	12,210	19,0	19,306
0,70	3,7056	3,4	8,1666	7,8	12,369	19,5	19,558
0,75	3,8356	3,5	8,2858	8,0	12,527	20	19,807
0,80	3,9614	3,6	8,4036	8,2	12,683	21	20,296
0,85	4,0833	3,7	8,5192	8,4	12,837	22	20,774
0,90	4,2017	3,8	8,6339	8,6	12,989	23	21,241
0,95	4,3169	3,9	8,7464	8,8	13,139	24	21,698
1,0	4,4290	4,0	8,8580	9,0	13,287	25	22,145
1,1	4,6451	4,1	8,9678	9,2	13,434	26	22,583
1,2	4,8515	4,2	9,0768	9,4	13,579	27	23,014
1,3	5,0500	4,3	9,1840	9,6	13,723	28	23,436
1,4	5,2404	4,4	9,2903	9,8	13,865	29	23,851
1,5	5,4242	4,5	9,3952	10,0	14,006	30	24,259
1,6	5,6022	4,6	9,4993	10,5	14,352	32	25,054
1,7	5,7745	4,7	9,6016	11,0	14,689	34	25,825
1,8	5,9420	4,8	9,7035	11,5	15,020	36	26,574
1,9	6,1049	4,9	9,8040	12,0	15,343	38	27,302

Tabelle IV. Trigonometrische Zahlen.

Grad	Sinus							Grad
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	0,01745	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	0,03490	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	0,05234	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	0,06976	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	0,08716	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	0,10453	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	0,12187	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	0,13917	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	0,15643	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	0,17365	**80**
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	0,19081	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	0,20791	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	0,22495	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	0,24192	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	0,25882	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	0,27564	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	0,29237	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	0,30902	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	0,32557	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	0,34202	**70**
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	0,35837	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	0,37461	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	0,39073	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40141	0,40408	0,40674	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	0,42262	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	0,43837	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	0,45399	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	0,46947	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	0,48481	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	0,50000	**60**
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	0,51504	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	0,52992	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	0,54464	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	0,55919	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	0,57358	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	0,58779	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	0,60182	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	0,61566	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	0,62932	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	0,64279	**50**
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	0,65606	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	0,66913	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	0,68200	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	0,69466	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	0,70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	
	Cosinus							

Grad	Cosinus 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	Grad
0	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	0,99985	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	0,99939	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	0,99863	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	0,99756	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	0,99619	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	0,99452	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	0,99255	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	0,99027	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	0,98769	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	0,98481	**80**
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	0,98163	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	0,97815	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	0,97437	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	0,97030	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	0,96593	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	0,96126	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	0,95630	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	0,95106	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	0,94552	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	0,93969	**70**
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	0,93358	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	0,92718	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	0,92050	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	0,91355	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	0,90631	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	0,89879	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	0,89101	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	0,88295	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	0,87462	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	0,86603	**60**
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	0,85717	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	0,84805	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	0,83867	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	0,82904	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	0,81915	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	0,80902	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	0,79864	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	0,78801	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	0,77715	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	0,76604	**50**
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	0,75471	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	0,74314	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	0,73135	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	0,71934	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	0,70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	

Sinus

Grad	Tangens 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	Grad
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	0,01746	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	0,03492	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	0,05241	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	0,06993	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	0,08749	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	0,10510	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	0,12278	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	0,14054	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	0,15838	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	0,17633	**80**
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	0,19438	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	0,21256	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	0,23087	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	0,24933	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	0,26795	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	0,28675	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	0,30573	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	0,32492	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	0,34433	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	0,36397	**70**
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	0,38386	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	0,40403	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	0,42447	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	0,44523	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	0,46631	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	0,48773	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	0,50953	63
27	0,50953	0,51319	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	0,53171	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	0,55431	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	0,57735	**60**
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	0,60086	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	0,62487	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	0,64941	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	0,67451	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	0,70021	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	0,72654	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	0,75355	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	0,78129	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	0,80978	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	0,83910	**50**
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	0,86929	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,83473	0,88992	0,89515	0,90040	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	0,93252	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	0,96569	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ Cotangens	

Grad	Cotangens							Grad
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	57,28996	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	28,63625	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	19,08114	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	14,30067	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	11,43005	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	9,51436	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	8,14435	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	7,11537	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	6,31375	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	5,67128	**80**
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	5,14455	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	4,70463	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	4,33148	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	4,01078	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	3,73205	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	3,48741	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	3,27085	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	3,07768	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98869	2,96004	2,93189	2,90421	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	2,74748	**70**
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	2,60509	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	2,47509	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	2,35585	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	2,24604	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	2,14451	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	2,05030	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	1,96261	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	1,88073	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	1,80405	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	1,73205	**60**
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	1,66428	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	1,60033	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	1,53987	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	1,48256	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	1,42815	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	1,37638	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	1,32704	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	1,27994	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	1,23490	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	1,19175	**50**
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	1,15037	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	1,11061	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	1,07237	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	1,03553	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	

Tangens

Tabelle V. Logarithmen der Zahlen 1 bis 1200.

Nr.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
1	00000	04139	07918	11394	14613	17609	20412	23045	25527	27875	2228
2	30103	32222	34242	36173	38021	39794	41497	43136	44716	46240	1472
3	47712	49136	50515	51851	53148	54407	55630	56820	57978	59106	1100
4	60206	61278	62325	63347	64345	65321	66276	67210	68124	69020	877
5	69897	70757	71600	72428	73239	74036	74819	75587	76343	77085	730
6	77815	78533	79239	79934	80618	81291	81954	82607	83251	83885	625
7	84510	85126	85733	86332	86923	87506	88081	88649	80209	89763	546
8	90309	90849	91381	91908	92428	92942	93450	93952	94448	94939	485
9	95424	95904	96379	96848	97313	97772	98227	98677	99123	99564	436
10	00000	00432	00860	01284	01703	02119	02531	02938	03342	03743	396
11	04139	04532	04922	05308	05690	06070	06446	06819	07188	07555	363
12	07918	08279	08636	08991	09342	09691	10037	10380	10721	11059	335
13	11394	11727	12057	12385	12710	13033	13354	13672	13988	14301	312
14	14613	14922	15229	15534	15836	16137	16435	16732	17026	17319	290
15	17609	17898	18184	18469	18752	19033	19312	19590	19866	20140	272
16	20412	20683	20952	21219	21484	21748	22011	22272	22531	22789	256
17	23045	23300	23553	23805	24055	24304	24551	24797	25042	25285	242
18	25527	25768	26007	26245	26482	26717	26951	27184	27416	27646	229
19	27875	28103	28330	28556	28780	29003	29226	29447	29667	29885	218
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175	31387	31597	31806	32015	207
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244	33445	33646	33846	34044	198
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218	35411	35603	35793	35984	189
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107	37291	37475	37658	37840	181
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917	39094	39270	39445	39620	174
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654	40824	40993	41162	41330	167
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325	42488	42651	42813	42975	161
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933	44091	44248	44404	44560	156
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484	45637	45788	45939	46090	150
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982	47129	47276	47422	47567	145
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430	48572	48714	48855	48996	140
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831	49969	50106	50243	50379	136
32	50515	50651	50786	50920	51055	51188	51322	51455	51587	51720	132
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504	52634	52763	52892	53020	128
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782	53908	54033	54158	54283	124
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023	55145	55267	55388	55509	121
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229	56348	56467	56585	56703	117
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403	57519	57634	57749	57864	114
38	57978	58092	58206	58320	58433	58546	58659	58771	58883	58995	111
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660	59770	59879	59988	60097	109
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746	60853	60959	61066	61172	106
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805	61909	62014	62118	62221	104
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839	62941	63043	63144	63246	101
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849	63949	64048	64147	64246	99
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836	64933	65031	65128	65225	97
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801	65896	65992	66087	66181	95
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745	66839	66932	67025	67117	93
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669	67761	67852	67943	68034	90
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574	68664	68753	68842	68931	89
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461	69548	69636	69723	69810	87
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329	70415	70501	70586	70672	86
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181	71265	71349	71433	71517	84
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016	72099	72181	72263	72346	83
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835	72916	72997	73078	73159	81
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640	73719	73799	73878	73957	80
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429	74507	74586	74663	74741	78
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205	75282	75358	75435	75511	77
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967	76042	76118	76193	76268	76
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716	76790	76864	76938	77012	74
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452	77525	77597	77670	77743	73
Nr.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.

Nr.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176	78247	78319	78390	78462	72
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888	78958	79029	79099	79169	71
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588	79657	79727	79796	79865	69
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277	80346	80414	80482	80550	68
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956	81023	81090	81158	81224	67
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624	81690	81757	81823	81889	66
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282	82347	82413	82478	82543	65
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930	82995	83059	83123	83187	64
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569	83632	83696	83759	83822	63
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198	84261	84323	84386	84448	63
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819	84880	84942	85003	85065	62
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431	85491	85552	85612	85673	61
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034	86094	86153	86213	86273	60
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629	86688	86747	86806	86864	59
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216	87274	87332	87390	87448	58
75	87506	87564	87622	87679	87737	87795	87852	87910	87967	88024	58
76	88081	88138	88195	88252	88309	88366	88423	88480	88536	88593	57
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930	88986	89042	89098	89154	56
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487	89542	89597	89653	89708	55
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037	90091	90146	90200	90255	55
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580	90634	90687	90741	90795	54
81	90849	90902	90956	91009	91062	91116	91169	91222	91275	91328	53
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645	91698	91751	91803	91855	52
83	91908	91960	92012	92065	92117	92169	92221	92273	92324	92376	52
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686	92737	92788	92840	92891	51
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197	93247	93298	93349	93399	51
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702	93752	93802	93852	93902	50
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201	94250	94300	94349	94399	50
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694	94743	94792	94841	94890	49
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182	95231	95279	95328	95376	49
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665	95713	95761	95809	95856	48
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142	96190	96237	96284	96332	47
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614	96661	96708	96755	96802	47
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081	97128	97174	97220	97267	46
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543	97589	97635	97681	97727	46
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000	98046	98091	98137	98182	45
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453	98498	98543	98588	98632	45
97	88677	98722	98767	98811	98856	98900	98945	98989	99034	99078	45
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344	99388	99432	99476	99520	44
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782	99826	99870	99913	99957	44
100	00000	00043	00087	00130	00173	00217	00260	00303	00346	00389	43
101	00432	00475	00518	00561	00604	00647	00689	00732	00775	00817	43
102	00860	00903	00945	00988	01030	01072	01115	01157	01199	01242	42
103	01284	01326	01368	01410	01452	01494	01536	01578	01620	01662	42
104	01703	01745	01787	01828	01870	01912	01953	01995	02036	02078	42
105	02119	02160	02202	02243	02284	02325	02366	02407	02449	02490	41
106	02531	02572	02612	02653	02694	02735	02776	02816	02857	02898	41
107	02938	02979	03019	03060	03100	03141	03181	03222	03262	03302	41
108	03342	03383	03423	03463	03503	03543	03583	03623	03663	03703	40
109	03743	03782	03822	03862	03902	03941	03981	04021	04060	04100	40
110	04139	04179	04218	04258	04297	04336	04376	04415	04454	04493	39
111	04532	04571	04610	04650	04689	04727	04766	04805	04844	04883	39
112	04922	04961	04999	05038	05077	05115	05154	05192	05231	05269	39
113	05308	05346	05385	05423	05461	05500	05538	05576	05614	05652	38
114	05690	05729	05767	05805	05843	05881	05918	05956	05994	06032	38
115	06070	06108	06145	06183	06221	06258	06296	06333	06371	06408	38
116	06446	06483	06521	06558	06595	06633	06670	06707	06744	06781	37
117	06819	06856	06893	06930	06967	07004	07041	07078	07115	07151	37
118	07188	07225	07262	07298	07335	07372	07408	07445	07482	07518	37
119	07555	07591	07628	07664	07700	07737	07773	07809	07846	07882	36

Nr. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Diff.

